高校数学ＩＡ　単元別演習ドリル

第 3 章 2次関数（5）

2次不等式の応用 ／ 解の存在範囲 ／ 2次関数の発展問題

目次

1　実数解の個数・2つの方程式の解の条件 …… 1

2　2次不等式の文章題 …… 2

3　条件つきの最大・最小 …… 3

4　絶対値のついた2次関数のグラフ …… 4

5　グラフを利用した方程式の実数解の個数 …… 5

6　解の存在範囲（1）　解の符号 …… 6

7　解の存在範囲（2）　区間内の解 …… 7

8　解の存在範囲（3）　端点の符号・定数分離 …… 8

9　2つの2次関数の大小関係 …… 9

解答・解説 …… 10

1　実数解の個数・2つの方程式の解の条件　重要度 ★★★★☆

◆ 次の問いに答えなさい。

Lv.3 (1) m は定数とする。x の方程式 $mx^2+2(m+1)x+m+3=0$ の実数解の個数を調べなさい。

◆ 2 つの 2 次方程式 $x^2-2ax+a+6=0$ …①、$x^2+2ax+4a=0$ …② について、次の条件を満たす定数 a の値の範囲を求めなさい。

Lv.3 (2) ①、② がともに実数解をもつ。

Lv.4 (3) ①、② の少なくとも一方が実数解をもつ。

Lv.4 (4) ①、② の一方だけが実数解をもつ。

計算・解答スペース

2 2次不等式の文章題 重要度 ★★★☆☆

◆ 次の問いに答えなさい。

Lv.3 (1) 周の長さが $24\ \mathrm{cm}$ の長方形で、面積が $32\,\mathrm{cm}^2$ 以上となるような、縦の長さの範囲を求めなさい。

Lv.4 (2) 縦 $10\ \mathrm{m}$、横 $16\ \mathrm{m}$ の長方形の土地に、縦と横に同じ幅の道を 1 本ずつ通す。道を除いた土地の面積を $112\,\mathrm{m}^2$ 以上にするとき、道幅の範囲を求めなさい。

Lv.4 (3) ある商品を 1 個 100 円で売ると 1 日に 400 個売れ、1 円値上げするごとに 1 日の売り上げ個数が 2 個ずつ減る。1 日の売上金額を 44800 円以上にするには、1 個の値段をいくらにすればよいか。

計算・解答スペース

3 条件つきの最大・最小 重要度 ★★★★☆

◆ 次の問いに答えなさい。

Lv.4 (1) 実数 $x,\ y$ が $x^2+y^2=4$ を満たすとき、$2x+y^2$ の最大値と最小値、およびそのときの $x,\ y$ の値を求めなさい。

Lv.4 (2) 実数 $x,\ y$ が $x^2+y^2=5$ を満たすとき、$x+2y$ の最大値と最小値、およびそのときの $x,\ y$ の値を求めなさい。

計算・解答スペース

4 絶対値のついた2次関数のグラフ 重要度 ★★★☆☆

◆ 次の関数のグラフをかきなさい。

Lv.3 (1) $y = x^2 - 2|x| - 3$

Lv.3 (2) $y = |x^2 - 2x - 3|$

◆ (2) のグラフを利用して、次の問いに答えなさい。

Lv.4 (3) k は定数とする。方程式 $|x^2 - 2x - 3| = k$ の異なる実数解の個数を調べなさい。

計算・解答スペース

5　グラフを利用した方程式の実数解の個数　重要度 ★★★☆☆

◆ k は定数とする。次の方程式の異なる実数解の個数を調べなさい。

Lv.3 (1) $x^2-4|x|+3=k$

Lv.4 (2) $x^2-2x-k=0$ $(0 \leqq x \leqq 3)$

計算・解答スペース

6 解の存在範囲（1） 解の符号 重要度 ★★★★☆

◆ 2 次方程式 $x^2-2mx+m+6=0$ が次の条件を満たすような、定数 m の値の範囲を求めなさい。

Lv.3 (1) 異なる 2 つの正の解をもつ。

Lv.3 (2) 異なる 2 つの負の解をもつ。

Lv.4 (3) 正の解と負の解を 1 つずつもつ。

計算・解答スペース

7 解の存在範囲（2） 区間内の解 重要度 ★★★★☆

◆ 2 次方程式 $x^2-2ax+a+2=0$ が次の条件を満たすような、定数 a の値の範囲を求めなさい。

Lv.3 (1) 異なる 2 つの解がともに 1 より大きい。

Lv.3 (2) 1 つの解は 1 より大きく、他の解は 1 より小さい。

Lv.4 (3) 異なる 2 つの解がともに $0<x<3$ の範囲にある。

計算・解答スペース

8 解の存在範囲（3） 端点の符号・定数分離 重要度 ★★★☆☆

◆ 次の条件を満たすような、定数 a の値の範囲を求めなさい。

Lv.3 (1) 2 次方程式 $x^2-3x+a=0$ が、$0<x<1$ と $2<x<3$ の範囲に 1 つずつ解をもつ。

Lv.4 (2) 2 次方程式 $2x^2-ax+a-4=0$ が、$-1<x<0$ と $1<x<2$ の範囲に 1 つずつ解をもつ。

Lv.4 (3) 2 次方程式 $x^2+2x+a=0$ が、$-2<x<1$ の範囲に少なくとも 1 つの解をもつ。

計算・解答スペース

9 2つの2次関数の大小関係 重要度 ★★★☆☆

◆ 2 つの 2 次関数 $f(x)=x^2-2x+a$, $g(x)=-x^2+4x-3$ がある。次の条件が成り立つような、定数 a の値の範囲を求めなさい。

Lv.3 (1) すべての実数 x に対して $f(x)>g(x)$ が成り立つ。

Lv.3 (2) ある実数 x に対して $f(x)<g(x)$ が成り立つ。

Lv.4 (3) $0 \leqq x_1 \leqq 3$, $0 \leqq x_2 \leqq 3$ を満たすすべての実数 x_1, x_2 に対して $f(x_1)>g(x_2)$ が成り立つ。

Lv.4 (4) $0 \leqq x_1 \leqq 3$, $0 \leqq x_2 \leqq 3$ を満たすある実数 x_1, x_2 に対して $f(x_1)<g(x_2)$ が成り立つ。

計算・解答スペース

解答・解説

1

【考え方・テクニック】

「方程式」とだけあるときは、x^2 の係数が 0（1 次方程式）の場合を別に調べます。2 つの方程式の判別式を $D_1,\ D_2$ とすると、ともに → $D_1 \geqq 0$ かつ $D_2 \geqq 0$（共通範囲）、少なくとも一方 → $D_1 \geqq 0$ または $D_2 \geqq 0$（合わせた範囲）です。

【正答】

(1)　$m<0,\ 0<m<1$ のとき 2 個、$m=0,\ 1$ のとき 1 個、$m>1$ のとき 0 個

(2)　$a \leqq -2,\ 4 \leqq a$

(3)　$a \leqq 0,\ 3 \leqq a$

(4)　$-2<a \leqq 0,\ 3 \leqq a<4$

【解説】

(1)　$m=0$ のとき $2x+3=0$ で解は 1 個。$m \neq 0$ のとき
$\dfrac{D}{4}=(m+1)^2-m(m+3)=1-m$ の符号で場合分けします。

①の判別式 $\dfrac{D_1}{4}=a^2-a-6=(a+2)(a-3)$、②の判別式 $\dfrac{D_2}{4}=a^2-4a=a(a-4)$ です。
$D_1 \geqq 0$ から $a \leqq -2,\ 3 \leqq a$、$D_2 \geqq 0$ から $a \leqq 0,\ 4 \leqq a$ となります。

(4)　(3) の範囲から (2) の範囲を除いたものです。

2

【考え方・テクニック】

何を x とおくかを決め、大小関係を不等式で表します。長さや個数は正（または 0 以上）なので、x の変域を必ず確認し、不等式の解との共通範囲を答えます。

【正答】

(1) 4 cm 以上 8 cm 以下

(2) 2 m 以下

(3) 140 円以上 160 円以下

【解説】

(1) 縦を x cm とすると横は $(12-x)$ cm、$0<x<12$。$x(12-x)\geqq 32$ から $(x-4)(x-8)\leqq 0$、$4\leqq x\leqq 8$ です。

(2) 道幅を x m とすると $0<x<10$。道を端に寄せて考えると、残りは縦 $(10-x)$、横 $(16-x)$ の長方形と同じ面積なので $(10-x)(16-x)\geqq 112$。$x^2-26x+48\geqq 0$ から $(x-2)(x-24)\geqq 0$、$x\leqq 2,\ 24\leqq x$。$0<x<10$ と合わせて $0<x\leqq 2$ です。

(3) x 円値上げするとすると、$0\leqq x\leqq 200$。$(100+x)(400-2x)\geqq 44800$ を整理すると $x^2-100x+2400\leqq 0$、$(x-40)(x-60)\leqq 0$ から $40\leqq x\leqq 60$ です。

3

【考え方・テクニック】

(1) のように条件式から $y^2=4-x^2$ と表して消去するときは、$y^2 \geqq 0$ から x の変域が生じることに注意します。(2) のように 1 次式の値の範囲を求めるときは、$x+2y=t$ とおき、x を消去した 2 次方程式が実数解をもつ条件（$D \geqq 0$）を使います。

【正答】

(1)　$(x,\ y)=(1,\ \pm\sqrt{3})$ のとき最大値 5、$(x,\ y)=(-2,\ 0)$ のとき最小値 -4

(2)　$(x,\ y)=(1,\ 2)$ のとき最大値 5、$(x,\ y)=(-1,\ -2)$ のとき最小値 -5

【解説】

(1)　$y^2=4-x^2 \geqq 0$ から $-2 \leqq x \leqq 2$。$2x+y^2=-x^2+2x+4=-(x-1)^2+5$ です。
$x=1$ のとき $y^2=3$、$x=-2$ のとき $y^2=0$ です（$x=2$ のときは 4）。

(2)　$x+2y=t$ とおくと $x=t-2y$。$x^2+y^2=5$ に代入して $5y^2-4ty+t^2-5=0$。y は実数なので $\frac{D}{4}=4t^2-5(t^2-5)=25-t^2 \geqq 0$ から $-5 \leqq t \leqq 5$。$t=\pm 5$ のとき重解 $y=\frac{2t}{5}=\pm 2$、$x=t-2y=\pm 1$ です。

4

【考え方・テクニック】

$y=f(|x|)$ は $x \geqq 0$ の部分をかき、y 軸に関して折り返します。$y=|f(x)|$ は $y=f(x)$ のグラフの x 軸より下の部分を x 軸に関して折り返します。方程式 $f(x)=k$ の実数解の個数は、グラフ $y=f(x)$ と直線 $y=k$ の共有点の個数です。

【正答】

(1)　下の図

(2)　下の図

(3)　$k<0$ のとき 0 個、$k=0$ のとき 2 個、$0<k<4$ のとき 4 個、$k=4$ のとき 3 個、$k>4$ のとき 2 個

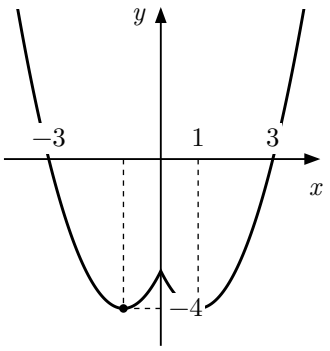
【解説】

(1)　$x \geqq 0$ のとき $y=(x-1)^2-4$、$x<0$ のとき $y=(x+1)^2-4$ です。

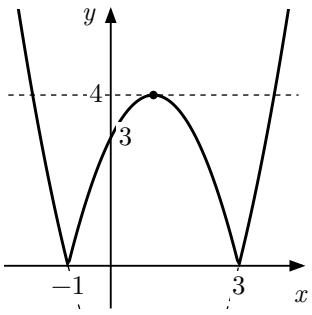
(2)　$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$ より、$-1<x<3$ では
$y=-(x^2-2x-3)=-(x-1)^2+4$ となります。

(3)　(2) のグラフと直線 $y=k$ を動かして共有点を数えます。$k=4$ のときは折り返した部分の頂点 $(1,\ 4)$ で接します。

(1)



(2)



5

【考え方・テクニック】

定数 k を右辺に分離して $f(x)=k$ の形にすると、実数解の個数は「$y=f(x)$ のグラフ」と「x 軸に平行な直線 $y=k$」の共有点の個数になります。グラフは固定されるので、直線 $y=k$ を上下に動かして数えましょう。定義域がある場合は端点に注意します。

【正答】

(1) $k<-1$ のとき 0 個、$k=-1$ のとき 2 個、$-1<k<3$ のとき 4 個、$k=3$ のとき 3 個、$k>3$ のとき 2 個

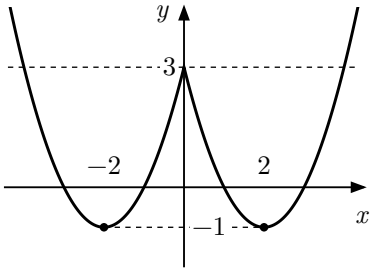
(2) $k<-1$ のとき 0 個、$k=-1$ のとき 1 個、$-1<k\leqq 0$ のとき 2 個、$0<k\leqq 3$ のとき 1 個、$k>3$ のとき 0 個

【解説】

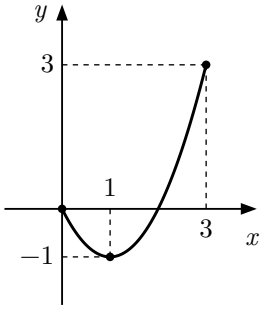
(1) $y=x^2-4|x|+3$ は、$x\geqq 0$ で $y=(x-2)^2-1$、$x<0$ で $y=(x+2)^2-1$ のグラフです（左下の図）。

(2) $x^2-2x=k$ と変形し、$y=x^2-2x=(x-1)^2-1$ $(0\leqq x\leqq 3)$ と直線 $y=k$ の共有点を数えます。端点は $(0,\ 0)$，$(3,\ 3)$、頂点は $(1,\ -1)$ です（右下の図）。

(1) $y=x^2-4|x|+3$



(2) $y=x^2-2x$ $(0\leqq x\leqq 3)$



6

【考え方・テクニック】

$f(x)=x^2-2mx+m+6$ とおき、 $y=f(x)$ のグラフ（下に凸）をイメージします。 $x>0$ の部分で x 軸と異なる 2 点で交わる条件は［1］$D>0$ ［2］軸 >0 ［3］$f(0)>0$ の 3 つ。正と負の解を 1 つずつもつ条件は $f(0)<0$ だけで十分です。

【正答】

(1)　$m>3$

(2)　$-6<m<-2$

(3)　$m<-6$

【解説】

$\frac{D}{4}=m^2-m-6=(m+2)(m-3)$、軸は直線 $x=m$、$f(0)=m+6$ です。

(1)　$D>0$ から $m<-2,\ 3<m$。軸 $m>0$。$f(0)=m+6>0$ から $m>-6$。共通範囲は $m>3$ です。

(2)　$D>0$、軸 $m<0$、$f(0)>0$ の共通範囲で $-6<m<-2$ です。

(3)　$f(0)=m+6<0$ ならば、グラフは x 軸の負の部分と正の部分で 1 回ずつ交わります（このとき $D>0$ は自動的に成り立ちます）。

7

【考え方・テクニック】

$f(x)=x^2-2ax+a+2$ のグラフについて、「判別式 D」「軸の位置」「区間の端での f の値の符号」の 3 点に着目します。p をはさむ解をもつ条件は $f(p)<0$ だけ、区間 $p<x<q$ に 2 解をもつ条件は $D>0$、$p<$ 軸 $<q$、$f(p)>0$、$f(q)>0$ です。

【正答】

(1)　$2<a<3$

(2)　$a>3$

(3)　$2<a<\frac{11}{5}$

【解説】

$\frac{D}{4}=a^2-a-2=(a+1)(a-2)$、軸は直線 $x=a$、$f(0)=a+2$, $f(1)=3-a$, $f(3)=11-5a$ です。

(1)　$D>0$ から $a<-1,\ 2<a$。軸 $a>1$。$f(1)=3-a>0$ から $a<3$。共通範囲は $2<a<3$ です。

(2)　$f(1)=3-a<0$ から $a>3$ です。

(3)　$D>0$、$0<a<3$、$f(0)=a+2>0$、$f(3)=11-5a>0$ の共通範囲で $2<a<\frac{11}{5}$ です。

8

【考え方・テクニック】

$f(p)$ と $f(q)$ が異符号なら、$y=f(x)$ のグラフは $p<x<q$ で必ず x 軸と交わります。各区間の端の符号を図で確認して条件を立てましょう。「少なくとも 1 つ」の問題は、$a=g(x)$ の形に定数を分離し、グラフと直線 $y=a$ の共有点を考えると見通しがよくなります。

【正答】

(1)　$0<a<2$

(2)　$1<a<4$

(3)　$-3<a\leqq 1$

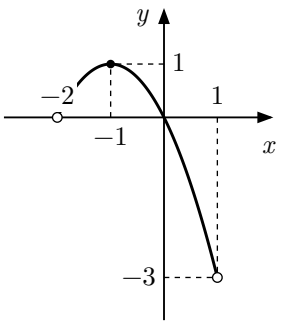
【解説】

(1)　$f(x)=x^2-3x+a$ とおくと、$f(0)=a>0$，$f(1)=a-2<0$，$f(2)=a-2<0$，$f(3)=a>0$ から $0<a<2$ です。

(2)　$f(x)=2x^2-ax+a-4$ とおくと、$f(-1)=2a-2>0$，$f(0)=a-4<0$，$f(1)=-2<0$，$f(2)=4-a>0$ から $1<a<4$ です。

(3)　$a=-x^2-2x$ と変形し、$y=-x^2-2x=-(x+1)^2+1$ $(-2<x<1)$ と直線 $y=a$ の共有点を考えます。このグラフの y の値の範囲は $-3<y\leqq 1$（端点 $(-2,\ 0)$，$(1,\ -3)$ は含まない）なので、$-3<a\leqq 1$ です。

(3) $y=-x^2-2x$ $(-2<x<1)$



9

【考え方・テクニック】

同じ x どうしを比べる（(1)(2)）は $F(x)=f(x)-g(x)$ の問題に直します（すべての x で $F(x)>0$ ⇔ 「F の最小値」 >0）。$x_1,\ x_2$ が別々に動く（(3)(4)）は、「f の最小値」と 「g の最大値」 を比べます。

【正答】

(1) $a>\frac{3}{2}$

(2) $a<\frac{3}{2}$

(3) $a>2$

(4) $a<2$

【解説】

(1) $F(x)=f(x)-g(x)=2x^2-6x+a+3$。常に $F(x)>0$ となる条件は
$\frac{D}{4}=9-2(a+3)=3-2a<0$ です。

(2) $F(x)<0$ となる x が存在する ⇔ $F(x)$ の最小値 <0 ⇔ $D>0$ なので、$3-2a>0$ です。

(3) $0\leqq x\leqq 3$ において、$f(x)=(x-1)^2+a-1$ の最小値は $f(1)=a-1$、
$g(x)=-(x-2)^2+1$ の最大値は $g(2)=1$。「f の最小値」 $>$ 「g の最大値」 から
$a-1>1$ です。

(4) 「f の最小値」 $<$ 「g の最大値」 から $a-1<1$ です。