高校数学ＩＡ　単元別演習ドリル

第 3 章 2次関数（4）

グラフと2次方程式 ／ 2次不等式 ／ 常に成り立つ不等式

目次

1 放物線と x 軸の共有点 …… 1

2 共有点の個数・x 軸に接する条件 …… 2

3 放物線が x 軸から切り取る線分の長さ …… 3

4 放物線と直線・2つの放物線の共有点 …… 4

5 2次不等式の解法（1） $D>0$ の場合 …… 5

6 2次不等式の解法（2） $D\leqq 0$ の場合 …… 6

7 連立不等式・絶対値を含む2次不等式 …… 7

8 文字係数の不等式・整数解 …… 8

9 不等式の解から係数を決定 …… 9

10 常に成り立つ不等式 …… 10

解答・解説 …… 11

1 放物線と x 軸の共有点 重要度 ★★★★★

◆ 次の 2 次関数のグラフは x 軸と共有点をもつか。もつときは、その座標を求めなさい。

Lv.1 (1) $y = x^2 - 2x - 8$

Lv.2 (2) $y = -x^2 + 6x - 9$

Lv.2 (3) $y = 2x^2 - 3x + 4$

Lv.3 (4) $y = x^2 + 4x + 1$

計算・解答スペース

2 共有点の個数・x 軸に接する条件 重要度 ★★★★★

◆ 次の問いに答えなさい。

Lv.2 (1) 放物線 $y=x^2-6x+k$ と x 軸の共有点の個数は、定数 k の値によってどのように変わるか答えなさい。

Lv.3 (2) 2 次関数 $y=x^2+(k-3)x+k$ のグラフが x 軸に接するように定数 k の値を定め、そのときの接点の座標を求めなさい。

Lv.4 (3) 2 次関数 $y=kx^2+4x+k-3$ のグラフが x 軸に接するように定数 k の値を定め、そのときの接点の座標を求めなさい。

計算・解答スペース

3 放物線が x 軸から切り取る線分の長さ 重要度 ★★★☆☆

◆ 次の問いに答えなさい。

Lv.2 (1) 放物線 $y = x^2 - 2x - 15$ が x 軸から切り取る線分の長さを求めなさい。

Lv.3 (2) 放物線 $y = 2x^2 + x - 4$ が x 軸から切り取る線分の長さを求めなさい。

Lv.4 (3) 放物線 $y = x^2 - (a+3)x + 3a$ が x 軸から切り取る線分の長さが 5 であるとき、定数 a の値を求めなさい。

計算・解答スペース

4 放物線と直線・2つの放物線の共有点 重要度 ★★★★☆

◆ 次の問いに答えなさい。

Lv.2 (1) 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x + 6$ の共有点の座標を求めなさい。

Lv.3 (2) 放物線 $y = x^2 + 2x + 5$ と直線 $y = 4x + 4$ の共有点の座標を求めなさい。

Lv.3 (3) 放物線 $y = x^2 + ax + 4$ が直線 $y = 2x + 3$ に接するように定数 a の値を定め、そのときの接点の座標を求めなさい。

Lv.4 (4) 2 つの放物線 $y = x^2 - 3x + 1$, $y = -x^2 + x + 7$ の共有点の座標を求めなさい。

計算・解答スペース

5 2次不等式の解法（1） $D>0$ の場合 重要度 ★★★★★

◆ 次の 2 次不等式を解きなさい。

Lv.1 (1) $x^2-x-12<0$

Lv.2 (2) $2x^2+x-3 \geqq 0$

Lv.2 (3) $x^2-4x+1>0$

Lv.3 (4) $-x^2+2x+8 \geqq 0$

Lv.3 (5) $3x^2-2x-2<0$

計算・解答スペース

6 2次不等式の解法（2） $D \leqq 0$ の場合 重要度 ★★★★☆

◆ 次の 2 次不等式を解きなさい。

Lv.2 (1) $x^2 - 6x + 9 > 0$

Lv.2 (2) $x^2 + 4x + 4 \leqq 0$

Lv.2 (3) $x^2 - 2x + 3 > 0$

Lv.3 (4) $-2x^2 + 4x - 5 \geqq 0$

Lv.3 (5) $4x^2 + 1 < 4x$

計算・解答スペース

7 連立不等式・絶対値を含む2次不等式 重要度 ★★★★☆

◆ 次の不等式を解きなさい。

Lv.2 (1) $\begin{cases} x^2 - x - 6 < 0 \\ x^2 - 4x + 3 > 0 \end{cases}$

Lv.3 (2) $\begin{cases} 2x^2 - 5x - 3 \leqq 0 \\ x^2 + x - 2 > 0 \end{cases}$

Lv.3 (3) $x + 1 < x^2 - 5 \leqq 2x + 3$

Lv.4 (4) $|x^2 - 4| < 3x$

計算・解答スペース

8 文字係数の不等式・整数解 重要度 ★★★☆☆

◆ a は定数とする。次の問いに答えなさい。

Lv.3 (1) 不等式 $x^2-(a+2)x+2a<0$ を解きなさい。

Lv.4 (2) 不等式 $ax^2 \geqq 2ax$ を解きなさい。

Lv.4 (3) 不等式 $x^2-(a+1)x+a<0$ を満たす整数 x がちょうど 2 個存在するような、a の値の範囲を求めなさい。

計算・解答スペース

9 不等式の解から係数を決定 重要度 ★★★★☆

◆ 次の条件を満たすように、定数 $a,\ b$ の値を定めなさい。

Lv.2 (1) 2 次不等式 $x^2+ax+b \leqq 0$ の解が $-1 \leqq x \leqq 4$ である。

Lv.3 (2) 2 次不等式 $ax^2+bx+6>0$ の解が $-2<x<3$ である。

Lv.4 (3) 2 次不等式 $ax^2+5x+b \leqq 0$ の解が $x \leqq \frac{1}{2},\ 2 \leqq x$ である。

計算・解答スペース

10 常に成り立つ不等式 重要度 ★★★★☆

◆ 次の条件を満たすような、定数の値の範囲を求めなさい。

Lv.3 (1) すべての実数 x に対して、$x^2+(k-1)x+k+2>0$ が成り立つ。

Lv.3 (2) すべての実数 x に対して、$-x^2+2kx-2k-3<0$ が成り立つ。

Lv.4 (3) すべての実数 x に対して、$ax^2+2x+a>0$ が成り立つ。

Lv.4 (4) $0 \leqq x \leqq 2$ のすべての x に対して、$x^2-2mx+2m+3>0$ が成り立つ。

計算・解答スペース

解答・解説

1

【考え方・テクニック】

$y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は、2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解です。判別式 $D=b^2-4ac$ が $D>0$ なら 2 点で交わり、$D=0$ なら 1 点で接し、$D<0$ なら共有点はありません。

【正答】

(1)　$(-2,\ 0)$，$(4,\ 0)$

(2)　$(3,\ 0)$（x 軸に接する）

(3)　共有点をもたない

(4)　$(-2+\sqrt{3},\ 0)$，$(-2-\sqrt{3},\ 0)$

【解説】

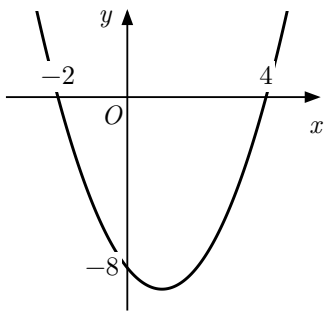
(1)　$x^2-2x-8=0$ から $(x+2)(x-4)=0$ です。

(2)　$-x^2+6x-9=0$ から $(x-3)^2=0$ で重解 $x=3$。グラフは x 軸に接します。

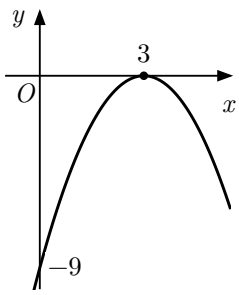
(3)　$D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot 4=-23<0$ なので、共有点はありません。

(4)　$x^2+4x+1=0$ から $x=-2\pm\sqrt{4-1}=-2\pm\sqrt{3}$ です。

(1)



(2)



2

【考え方・テクニック】

共有点の個数は判別式 D の符号で決まります。x 軸に接する $\Leftrightarrow D=0$ で、接点の x 座標は頂点の x 座標 $-\dfrac{b}{2a}$ です。x の係数が偶数 $2b'$ のときは $\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$ を使うと計算が楽です。

【正答】

(1) $k<9$ のとき 2 個、$k=9$ のとき 1 個、$k>9$ のとき 0 個

(2) $k=1$ のとき接点 $(1,\ 0)$、$k=9$ のとき接点 $(-3,\ 0)$

(3) $k=4$ のとき接点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$、$k=-1$ のとき接点 $(2,\ 0)$

【解説】

(1) $\dfrac{D}{4}=(-3)^2-k=9-k$ の符号で場合分けします。

(2) $D=(k-3)^2-4k=k^2-10k+9=(k-1)(k-9)=0$ から $k=1,\ 9$。接点の x 座標は $-\dfrac{k-3}{2}$ です。

(3) 2 次関数なので $k\neq 0$。$\dfrac{D}{4}=2^2-k(k-3)=-(k-4)(k+1)=0$ から $k=4,\ -1$（$k\neq 0$ を満たす）。接点の x 座標は $-\dfrac{4}{2k}=-\dfrac{2}{k}$ です。

3

【考え方・テクニック】

放物線が x 軸と 2 点 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$ $(\alpha<\beta)$ で交わるとき、切り取る線分の長さは $\beta-\alpha$ です。まず $y=0$ とおいた 2 次方程式を解きます。大小関係がわからないときは $|\beta-\alpha|$ と絶対値をつけて考えます。

【正答】

(1) 8

(2) $\dfrac{\sqrt{33}}{2}$

(3) $a=8,\ -2$

【解説】

(1) $(x+3)(x-5)=0$ から $x=-3,\ 5$。長さは $5-(-3)=8$ です。

(2) $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{33}}{4}$ より、長さは $\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}-\dfrac{-1-\sqrt{33}}{4}=\dfrac{\sqrt{33}}{2}$ です。

(3) $(x-a)(x-3)=0$ から $x=a,\ 3$。長さは $|a-3|=5$ なので $a-3=\pm5$、 $a=8,\ -2$ です。

4

【考え方・テクニック】

共有点の座標は、2 つの式を連立した方程式の実数解です。y を消去して得られる 2 次方程式について、実数解の個数が共有点の個数、重解をもつ ⇔ 接する（$D=0$）です。

【正答】

(1)　$(-2,\ 4)$，$(3,\ 9)$

(2)　$(1,\ 8)$（接する）

(3)　$a=4$ のとき接点 $(-1,\ 1)$、$a=0$ のとき接点 $(1,\ 5)$

(4)　$(-1,\ 5)$，$(3,\ 1)$

【解説】

(1)　$x^2=x+6$ から $(x+2)(x-3)=0$ です。

(2)　$x^2+2x+5=4x+4$ から $(x-1)^2=0$ で重解 $x=1$。放物線と直線は接します。

(3)　$x^2+ax+4=2x+3$ から $x^2+(a-2)x+1=0$。$D=(a-2)^2-4=0$ から
$a-2=\pm 2$、$a=4,\ 0$。重解は $x=-\dfrac{a-2}{2}$ です。

(4)　$x^2-3x+1=-x^2+x+7$ から $2x^2-4x-6=0$、$(x+1)(x-3)=0$ です。

5

【考え方・テクニック】

x^2 の係数を正にしてから、$y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の交点 α, β $(\alpha<\beta)$ を求めます。>0 ならグラフが x 軸より上の部分 $x<\alpha, \beta<x$、<0 なら下の部分 $\alpha<x<\beta$ です。

【正答】

(1) $-3<x<4$

(2) $x \leqq -\frac{3}{2}, 1 \leqq x$

(3) $x<2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}<x$

(4) $-2 \leqq x \leqq 4$

(5) $\frac{1-\sqrt{7}}{3}<x<\frac{1+\sqrt{7}}{3}$

【解説】

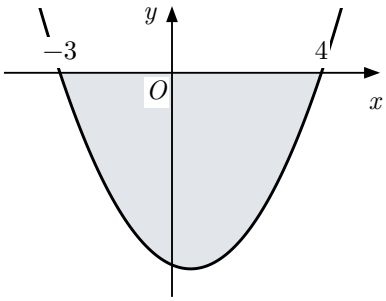
(2) $(2x+3)(x-1) \geqq 0$ です。

(3) $x^2-4x+1=0$ の解は $x=2\pm\sqrt{3}$ です。

(4) 両辺に -1 をかけて $x^2-2x-8 \leqq 0$（不等号の向きが変わる）。$(x+2)(x-4) \leqq 0$ です。

(5) $3x^2-2x-2=0$ の解は $x=\frac{1\pm\sqrt{1+6}}{3}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}$ です。

(1) $y=x^2-x-12$ のグラフ（x 軸より下の部分が $y<0$）



6

【考え方・テクニック】

$D=0$ のときは $a(x-p)^2$、$D<0$ のときは平方完成して $a(x-p)^2+q$ $(q>0)$ の形にして考えます。$(x-p)^2 \geqq 0$ がすべての実数 x で成り立つことを利用し、「すべての実数」「p 以外のすべての実数」「$x=p$」「解なし」を判断します。

【正答】

(1)　3 以外のすべての実数

(2)　$x=-2$

(3)　すべての実数

(4)　解なし

(5)　解なし

【解説】

(1)　$(x-3)^2>0$ は $x=3$ のときだけ成り立ちません。

(2)　$(x+2)^2 \leqq 0$ を満たすのは $(x+2)^2=0$ のときだけです。

(3)　$(x-1)^2+2>0$ はすべての実数 x で成り立ちます。

(4)　両辺に -1 をかけて $2x^2-4x+5 \leqq 0$、$2(x-1)^2+3 \leqq 0$ となり、これを満たす実数 x はありません。

(5)　移項して $4x^2-4x+1<0$、$(2x-1)^2<0$ を満たす実数 x はありません。

7

【考え方・テクニック】

連立不等式は、それぞれの不等式の解を求めてから数直線で共通範囲をとります。
$A<B<C$ は $A<B$ かつ $B<C$ と同じです。絶対値は中身の符号で場合分けし、各場合の条件との共通範囲をとってから合わせます。

【正答】

(1) $-2<x<1$

(2) $1<x\leqq 3$

(3) $3<x\leqq 4$

(4) $1<x<4$

【解説】

(1) 第 1 式から $-2<x<3$、第 2 式から $x<1,\ 3<x$。共通範囲は $-2<x<1$ です。

(2) 第 1 式は $(2x+1)(x-3)\leqq 0$ から $-\frac{1}{2}\leqq x\leqq 3$、第 2 式は $(x+2)(x-1)>0$ から $x<-2,\ 1<x$ です。

(3) $x+1<x^2-5$ から $x^2-x-6>0$、$x<-2,\ 3<x$。$x^2-5\leqq 2x+3$ から $x^2-2x-8\leqq 0$、$-2\leqq x\leqq 4$ です。

(4) $x\leqq -2,\ 2\leqq x$ のとき $x^2-4<3x$ から $-1<x<4$ で、$2\leqq x<4$。$-2<x<2$ のとき $-(x^2-4)<3x$ から $x^2+3x-4>0$、$x<-4,\ 1<x$ で、$1<x<2$。合わせて $1<x<4$ です。

8

【考え方・テクニック】

$(x-\alpha)(x-\beta)<0$ の解は、α と β の大小で変わるので場合分けします。x^2 の係数に文字があるときは、その正・0・負で場合分けします（負の数で割ると不等号の向きが変わる）。整数解は数直線で数えましょう。

【正答】

(1)　$a<2$ のとき $a<x<2$、$a=2$ のとき解なし、$a>2$ のとき $2<x<a$

(2)　$a>0$ のとき $x\leqq 0,\ 2\leqq x$、$a=0$ のときすべての実数、$a<0$ のとき $0\leqq x\leqq 2$

(3)　$-2\leqq a<-1,\ 3<a\leqq 4$

【解説】

(1)　$(x-a)(x-2)<0$ です。$a=2$ のとき $(x-2)^2<0$ となり解はありません。

(2)　$ax(x-2)\geqq 0$。$a>0$ なら $x(x-2)\geqq 0$、$a<0$ なら両辺を a で割って $x(x-2)\leqq 0$、$a=0$ なら $0\geqq 0$ で常に成り立ちます。

(3)　$(x-1)(x-a)<0$。$a>1$ のとき $1<x<a$ で、整数 $2,\ 3$ のちょうど 2 個を含む条件は $3<a\leqq 4$。$a<1$ のとき $a<x<1$ で、整数 $0,\ -1$ を含む条件は $-2\leqq a<-1$。$a=1$ のとき解はありません。

9

【考え方・テクニック】

解が $\alpha < x < \beta$ となる 2 次不等式は $(x-\alpha)(x-\beta) < 0$、解が $x < \alpha,\ \beta < x$ となるものは $(x-\alpha)(x-\beta) > 0$ です。解の形と不等号の向きから x^2 の係数の符号を決め、$a(x-\alpha)(x-\beta)$ と係数を比較します。

【正答】

(1)　$a = -3,\ b = -4$

(2)　$a = -1,\ b = 1$

(3)　$a = -2,\ b = -2$

【解説】

(1)　解が $-1 \leqq x \leqq 4$ の 2 次不等式は $(x+1)(x-4) \leqq 0$、すなわち $x^2 - 3x - 4 \leqq 0$ です。

(2)　解が「間」の形で不等号が $>$ なので $a < 0$。$ax^2 + bx + 6 = a(x+2)(x-3) = ax^2 - ax - 6a$ と比べて $-6a = 6$、$b = -a$ から $a = -1,\ b = 1$ です。

(3)　解が「外側」の形で不等号が $\leqq$ なので $a < 0$。$a\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2) = ax^2 - \frac{5}{2}ax + a$ と比べて $-\frac{5}{2}a = 5$ から $a = -2$、$b = a = -2$ です。

10

【考え方・テクニック】

すべての実数 x で $ax^2+bx+c>0$ ⇔ グラフが常に x 軸より上 ⇔ $a>0$ かつ $D<0$ です。x^2 の係数が文字なら 0 の場合も確認します。区間で常に成り立つ条件は「区間における最小値 >0」と考え、軸の位置で場合分けします。

【正答】

(1) $-1<k<7$

(2) $-1<k<3$

(3) $a>1$

(4) $-\frac{3}{2}<m<\frac{7}{2}$

【解説】

(1) $D=(k-1)^2-4(k+2)=k^2-6k-7=(k+1)(k-7)<0$ です。

(2) $x^2-2kx+2k+3>0$ がすべての x で成り立てばよいので、
$\frac{D}{4}=k^2-2k-3=(k+1)(k-3)<0$ です。

(3) $a=0$ のとき $2x>0$ で、すべての x では成り立たない。$a\neq 0$ のとき $a>0$ かつ $\frac{D}{4}=1-a^2<0$ から $a>1$ です。

(4) $f(x)=(x-m)^2-m^2+2m+3$。$m<0$ のとき最小値 $f(0)=2m+3>0$ から $-\frac{3}{2}<m<0$。$0\leqq m\leqq 2$ のとき最小値 $f(m)=-m^2+2m+3>0$ から $-1<m<3$ で、$0\leqq m\leqq 2$ はすべて適する。$m>2$ のとき最小値 $f(2)=7-2m>0$ から $2<m<\frac{7}{2}$。これらを合わせます。