高校数学ＩＡ　単元別演習ドリル

第 3 章 2次関数（3）

2次方程式の解法 ／ 連立方程式 ／ 判別式と実数解

目次

1　2次方程式の解法（1）　因数分解 …… 1

2　2次方程式の解法（2）　解の公式 …… 2

3　いろいろな2次方程式 …… 3

4　解から係数を決定・他の解 …… 4

5　連立方程式（2次を含む） …… 5

6　文字係数の方程式 …… 6

7　実数解の個数と判別式 …… 7

8　実数解をもつ条件・共通解 …… 8

解答・解説 …… 9

1　2次方程式の解法（1）　因数分解　重要度 ★★★★★

◆ 次の 2 次方程式を解きなさい。

Lv.1　(1)　$x^2 - 5x + 6 = 0$

Lv.1　(2)　$4x^2 - 9 = 0$

Lv.2　(3)　$3x^2 + 5x - 2 = 0$

Lv.2　(4)　$6x^2 - x - 12 = 0$

Lv.3　(5)　$(x+2)(x-3) = 2(x+2)$

計算・解答スペース

2 2次方程式の解法（2） 解の公式 重要度 ★★★★★

◆ 次の 2 次方程式を、解の公式を用いて解きなさい。

Lv.1 (1) $x^2+3x+1=0$

Lv.2 (2) $2x^2-5x+1=0$

Lv.2 (3) $x^2-6x+4=0$

Lv.3 (4) $3x^2+4x-2=0$

Lv.3 (5) $9x^2-12x+4=0$

計算・解答スペース

3 いろいろな2次方程式 重要度 ★★★★☆

◆ 次の方程式を解きなさい。

Lv.2 (1) $\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}=0$

Lv.3 (2) $\sqrt{3}x^2-4x+\sqrt{3}=0$

Lv.3 (3) $(x-1)^2-5(x-1)+6=0$

Lv.4 (4) $x^2-|x|-6=0$

計算・解答スペース

4 解から係数を決定・他の解 重要度 ★★★★☆

◆ 次の問いに答えなさい。

Lv.2 (1) 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解が 3 と -5 であるとき、定数 $a,\ b$ の値を求めなさい。

Lv.3 (2) 2 次方程式 $ax^2+(a+3)x-6=0$ の 1 つの解が -3 であるとき、定数 a の値と他の解を求めなさい。

Lv.4 (3) 2 次方程式 $x^2+(a-2)x+a^2-3a=0$ の 1 つの解が -1 であるとき、定数 a の値と他の解を求めなさい。

計算・解答スペース

5 連立方程式（2次を含む）　重要度 ★★★☆☆

◆ 次の連立方程式を解きなさい。

Lv.2 (1) $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$

Lv.3 (2) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x^2+xy=6 \end{cases}$

Lv.4 (3) $\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$

計算・解答スペース

6 文字係数の方程式 重要度 ★★★☆☆

◆ a は定数とする。次の x についての方程式を解きなさい。

Lv.3 (1) $ax-3=3x+a-6$

Lv.3 (2) $(a^2-1)x=a+1$

Lv.4 (3) $ax^2+(a-2)x-2=0$

計算・解答スペース

7 実数解の個数と判別式 重要度 ★★★★★

◆ 次の 2 次方程式の実数解の個数を求めなさい。

Lv.1 (1) $2x^2 - 3x - 4 = 0$

Lv.2 (2) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

Lv.2 (3) $3x^2 + 2x + 1 = 0$

◆ 次の問いに答えなさい。

Lv.3 (4) k は定数とする。2 次方程式 $x^2 + 4x + k - 1 = 0$ の実数解の個数を調べなさい。

Lv.4 (5) 2 次方程式 $x^2 + 2(m-1)x + m + 5 = 0$ が重解をもつように定数 m の値を定め、そのときの重解を求めなさい。

計算・解答スペース

8 実数解をもつ条件・共通解 重要度 ★★★★☆

◆ 次の問いに答えなさい。

Lv.3 (1) x の 2 次方程式 $x^2-4x+2a-1=0$ が実数解をもつような、定数 a の値の範囲を求めなさい。

Lv.4 (2) x の方程式 $ax^2+4x+1=0$ が異なる 2 つの実数解をもつような、定数 a の値の範囲を求めなさい。

Lv.4 (3) 2 つの 2 次方程式 $x^2+kx+2=0$, $x^2+2x+k=0$ がただ 1 つの共通な実数解をもつように定数 k の値を定め、その共通解を求めなさい。

計算・解答スペース

解答・解説

1

【考え方・テクニック】

$AB=0$ ならば $A=0$ または $B=0$ を利用します。因数分解できるときは、まず因数分解を考えましょう。両辺に共通な式があっても、その式で割ってはいけません（0 で割る可能性があり、解を失います）。移項して因数分解します。

【正答】

(1)　$x=2,\ 3$

(2)　$x=\pm\frac{3}{2}$

(3)　$x=\frac{1}{3},\ -2$

(4)　$x=\frac{3}{2},\ -\frac{4}{3}$

(5)　$x=-2,\ 5$

【解説】

(3)　$(3x-1)(x+2)=0$ です。

(4)　たすきがけで $(2x-3)(3x+4)=0$ です。

(5)　$(x+2)(x-3)-2(x+2)=0$ より $(x+2)(x-5)=0$。両辺を $x+2$ で割ると $x=-2$ が失われるので注意します。

2

【考え方・テクニック】

$ax^2+bx+c=0$ の解は $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ です。x の係数が偶数 $b=2b'$ のときは $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ を使うと計算が楽になります。根号の中が 0 のときは解が 1 つ（重解）です。

【正答】

(1)　$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

(2)　$x=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{4}$

(3)　$x=3\pm\sqrt{5}$

(4)　$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{10}}{3}$

(5)　$x=\dfrac{2}{3}$（重解）

【解説】

(2)　$x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot2\cdot1}}{2\cdot2}=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{4}$

(3)　$b'=-3$ として $x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4}}{1}=3\pm\sqrt{5}$

(4)　$b'=2$ として $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+6}}{3}=\dfrac{-2\pm\sqrt{10}}{3}$

(5)　$b'=-6$ として $x=\dfrac{6\pm\sqrt{36-36}}{9}=\dfrac{2}{3}$。$(3x-2)^2=0$ と因数分解することもできます。

3

【考え方・テクニック】

係数が分数なら分母の最小公倍数を、無理数なら適当な数を両辺にかけて、係数を整数にしてから解きます。同じ式のかたまりは X とおき換え、絶対値は中身の符号で場合分けします。場合分けしたら、解が条件を満たすか必ず確認しましょう。

【正答】

(1)　$x=\dfrac{2\pm\sqrt{7}}{3}$

(2)　$x=\sqrt{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(3)　$x=3,\ 4$

(4)　$x=\pm3$

【解説】

(1)　両辺に 6 をかけて $3x^2-4x-1=0$。$x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+3}}{3}=\dfrac{2\pm\sqrt{7}}{3}$ です。

(2)　両辺に $\sqrt{3}$ をかけて $3x^2-4\sqrt{3}x+3=0$。$x=\dfrac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{12-9}}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{3}}{3}$ より $x=\sqrt{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ です。

(3)　$X=x-1$ とおくと $X^2-5X+6=0$、$(X-2)(X-3)=0$ から $X=2,\ 3$。よって $x=3,\ 4$ です。

(4)　$x\geqq0$ のとき $x^2-x-6=0$ から $x=3,\ -2$、$x\geqq0$ より $x=3$。$x<0$ のとき $x^2+x-6=0$ から $x=-3,\ 2$、$x<0$ より $x=-3$ です。（$x^2=|x|^2$ から $|x|^2-|x|-6=0$、$|x|=3$ と解くこともできます。）

4

【考え方・テクニック】

「$x=\alpha$ が解である」とは「$x=\alpha$ を代入すると等式が成り立つ」ということです。解を代入して係数についての方程式を作ります。係数が決まったら、元の方程式に戻して他の解を求めます。a の値が複数あるときは、それぞれについて求めます。

【正答】

(1)　$a=2,\ b=-15$

(2)　$a=\frac{5}{2}$、他の解は $x=\frac{4}{5}$

(3)　$a=1$ のとき他の解は $x=2$、$a=3$ のとき他の解は $x=0$

【解説】

(1)　$x=3$，-5 を代入して $9+3a+b=0$，$25-5a+b=0$。これを解いて $a=2,\ b=-15$ です。

(2)　$x=-3$ を代入して $9a-3(a+3)-6=0$、$6a=15$ から $a=\frac{5}{2}$。方程式は $5x^2+11x-12=0$ となり、$(x+3)(5x-4)=0$ です。

(3)　$x=-1$ を代入して $1-(a-2)+a^2-3a=0$、$a^2-4a+3=0$ から $a=1,\ 3$。$a=1$ のとき $x^2-x-2=0$、$(x+1)(x-2)=0$。$a=3$ のとき $x^2+x=0$、$x(x+1)=0$ です。

5

【考え方・テクニック】

連立方程式の基本は文字を消去することです。1 次式があればそれを $y=\cdots$ の形にして 2 次式に代入します。1 次式がないときは、因数分解できる式を探し、$AB=0$ から 1 次の関係を引き出します。

【正答】

(1) $(x,\ y)=(3,\ 2),\ (-2,\ -3)$

(2) $(x,\ y)=(2,\ 1),\ (3,\ -1)$

(3) $(x,\ y)=(2\sqrt{2},\ \sqrt{2}),\ (-2\sqrt{2},\ -\sqrt{2}),\ (\sqrt{5},\ -\sqrt{5}),\ (-\sqrt{5},\ \sqrt{5})$

【解説】

(1) $y=x-1$ を代入して $x^2+(x-1)^2=13$、$x^2-x-6=0$ から $x=3,\ -2$。$y=x-1$ に代入します。

(2) $y=5-2x$ を代入して $x^2+x(5-2x)=6$、$x^2-5x+6=0$ から $x=2,\ 3$ です。

(3) 第 1 式から $(x-2y)(x+y)=0$。$x=2y$ のとき $5y^2=10$ で $y=\pm\sqrt{2}$。$x=-y$ のとき $2y^2=10$ で $y=\pm\sqrt{5}$ です。

6

【考え方・テクニック】

$Ax=B$ の形にしたら、$A\neq 0$ のときは両辺を A で割って $x=\frac{B}{A}$。$A=0$ のときは割れないので、$B\neq 0$ なら解なし、$B=0$ なら解はすべての実数です。「2 次方程式」と書かれていなければ、x^2 の係数が 0 の場合も考えます。

【正答】

(1)　$a\neq 3$ のとき $x=1$、$a=3$ のとき解はすべての実数

(2)　$a\neq \pm 1$ のとき $x=\frac{1}{a-1}$、$a=1$ のとき解なし、$a=-1$ のとき解はすべての実数

(3)　$a=0$ のとき $x=-1$、$a\neq 0$ のとき $x=-1,\ \frac{2}{a}$（$a=-2$ のときは $x=-1$）

【解説】

(1)　整理すると $(a-3)x=a-3$ です。

(2)　$(a+1)(a-1)x=a+1$。$a=1$ のとき $0\cdot x=2$ で解なし、$a=-1$ のとき $0\cdot x=0$ で、すべての実数が解です。

(3)　$a=0$ のとき $-2x-2=0$ で 1 次方程式。$a\neq 0$ のとき $(x+1)(ax-2)=0$ から $x=-1,\ \frac{2}{a}$。$a=-2$ のとき $\frac{2}{a}=-1$ となり、解は $x=-1$（重解）です。

7

【考え方・テクニック】

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 $D=b^2-4ac$ について、$D>0$ ⇔ 異なる 2 つの実数解、$D=0$ ⇔ 重解、$D<0$ ⇔ 実数解なし、です。$b=2b'$ のときは $\frac{D}{4}=b'^2-ac$ を使い、重解は $x=-\frac{b}{2a}$ で求められます。

【正答】

(1)　2 個

(2)　1 個

(3)　0 個

(4)　$k<5$ のとき 2 個、$k=5$ のとき 1 個、$k>5$ のとき 0 個

(5)　$m=4$ のとき重解 $x=-3$、$m=-1$ のとき重解 $x=2$

【解説】

(1)　$D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-4)=41>0$ です。

(2)　$\frac{D}{4}=(-6)^2-4\cdot 9=0$ です。

(3)　$\frac{D}{4}=1^2-3\cdot 1=-2<0$ です。

(4)　$\frac{D}{4}=2^2-(k-1)=5-k$ の符号で場合分けします。

(5)　$\frac{D}{4}=(m-1)^2-(m+5)=m^2-3m-4=(m-4)(m+1)=0$ から $m=4,\ -1$。重解は $x=-\frac{2(m-1)}{2}=-(m-1)$ です。

8

【考え方・テクニック】

実数解をもつ ⇔ $D \geqq 0$、異なる 2 つの実数解をもつ ⇔ $D > 0$ です。x^2 の係数に文字があるときは、その係数が 0 の場合（1 次方程式）を別に考えます。共通解は $x = \alpha$ とおいて両方の方程式に代入し、α^2 の項を消去します。

【正答】

(1) $a \leqq \frac{5}{2}$

(2) $a < 0,\ 0 < a < 4$

(3) $k = -3$、共通解は $x = 1$

【解説】

(1) $\frac{D}{4} = (-2)^2 - (2a - 1) = 5 - 2a \geqq 0$ から $a \leqq \frac{5}{2}$ です。

(2) $a = 0$ のとき $4x + 1 = 0$ で解は 1 つなので不適。$a \neq 0$ のとき
$\frac{D}{4} = 2^2 - a = 4 - a > 0$ から $a < 4$。$a \neq 0$ と合わせます。

(3) 共通解を α とすると $\alpha^2 + k\alpha + 2 = 0$，$\alpha^2 + 2\alpha + k = 0$。辺々引いて
$(k-2)\alpha - (k-2) = 0$、$(k-2)(\alpha - 1) = 0$。$k = 2$ のとき 2 つの方程式はともに
$x^2 + 2x + 2 = 0$ となり、実数解をもたないので不適。$\alpha = 1$ のとき $1 + k + 2 = 0$ から
$k = -3$。このとき $x^2 - 3x + 2 = 0$ の解は $1,\ 2$、$x^2 + 2x - 3 = 0$ の解は $1,\ -3$ で、共通解はただ 1 つ $x = 1$ です。