高校数学ＩＡ　単元別演習ドリル

第 3 章 2次関数（2）

2次関数の最大・最小 ／ 文字を含む場合 ／ 2次関数の決定

目次

1　最大・最小（1）　基本 …… 1

2　最大・最小（2）　定義域の端が動く …… 2

3　最大・最小（3）　軸が動く …… 3

4　最大・最小（4）　定義域が動く …… 4

5　最小値の最大値・最大最小から係数決定 …… 5

6　最大・最小の文章題 …… 6

7　2変数関数の最大・最小 …… 7

8　おき換えを利用する最大・最小 …… 8

9　2次関数の決定（1）　頂点・軸の条件 …… 9

10　2次関数の決定（2）　3点・交点の条件 …… 10

解答・解説 …… 11

1　最大・最小（1）　基本　重要度 ★★★★★

◆ 次の 2 次関数に最大値、最小値があれば、それを求めなさい。

Lv.1　(1)　$y = x^2 - 4x + 7$

Lv.2　(2)　$y = -2x^2 - 8x + 1$

Lv.2　(3)　$y = x^2 + 2x - 1 \ (-3 \leqq x \leqq 2)$

Lv.3　(4)　$y = -x^2 + 6x - 4 \ (0 \leqq x < 2)$

計算・解答スペース

2 最大・最小（2） 定義域の端が動く 重要度 ★★★★☆

◆ a は正の定数とする。$0 \leqq x \leqq a$ における関数 $f(x) = x^2 - 6x + 5$ について、次の問いに答えなさい。

Lv.3 (1) 最小値を求めなさい。

Lv.4 (2) 最大値を求めなさい。

計算・解答スペース

3 最大・最小（3） 軸が動く 重要度 ★★★★★

◆ a は定数とする。$0 \leqq x \leqq 4$ における関数 $f(x) = x^2 - 2ax + 3$ について、次の問いに答えなさい。

Lv.3 (1) 最小値を求めなさい。

Lv.4 (2) 最大値を求めなさい。

計算・解答スペース

4 最大・最小（4） 定義域が動く 重要度 ★★★★☆

◆ a は定数とする。 $a \leqq x \leqq a+2$ における関数 $f(x)=x^2-4x+1$ について、次の問いに答えなさい。

Lv.3 (1) 最小値を求めなさい。

Lv.4 (2) 最大値を求めなさい。

計算・解答スペース

5 最小値の最大値・最大最小から係数決定 重要度 ★★★★☆

◆ 次の問いに答えなさい。

Lv.3 (1) k は定数とする。2 次関数 $y = x^2 - 2kx + 4k$ の最小値を m とするとき、m を k の式で表しなさい。また、m の最大値とそのときの k の値を求めなさい。

Lv.3 (2) 関数 $y = -x^2 + 4x + c$ $(0 \leqq x \leqq 3)$ の最大値が 5 となるように定数 c の値を定め、そのときの最小値を求めなさい。

Lv.4 (3) 定義域を $0 \leqq x \leqq 3$ とする関数 $f(x) = ax^2 - 2ax + b$ の最大値が 6、最小値が -2 であるとき、定数 $a,\ b$ の値を求めなさい。

計算・解答スペース

6 最大・最小の文章題 重要度 ★★★★☆

◆ 次の問いに答えなさい。

Lv.3 (1) 長さ $20\ \mathrm{cm}$ の針金を折り曲げて長方形を作る。長方形の面積が最大となるのは、縦の長さを何 cm にしたときか。また、そのときの面積を求めなさい。

Lv.3 (2) 直角をはさむ 2 辺の長さの和が 12 である直角三角形のうち、斜辺の長さが最小となるものについて、直角をはさむ 2 辺の長さと斜辺の長さを求めなさい。

Lv.4 (3) $\angle B = 90°$, $AB = 6$, $BC = 8$ の直角三角形 ABC がある。点 P は A を出発して辺 AB 上を毎秒 1 の速さで B へ、点 Q は P と同時に B を出発して辺 BC 上を毎秒 2 の速さで C へ向かう。Q が C に着くまでの間で、$\triangle PBQ$ の面積が最大となるのは出発して何秒後か。また、そのときの面積を求めなさい。

計算・解答スペース

7 2変数関数の最大・最小 重要度 ★★★★☆

◆ 次の問いに答えなさい。

Lv.3 (1) $x+2y=4$ のとき、x^2+y^2 の最小値と、そのときの $x,\ y$ の値を求めなさい。

Lv.3 (2) $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y=6$ のとき、xy の最大値と最小値を求めなさい。

Lv.3 (3) $x,\ y$ が実数のとき、$P=x^2+2y^2-2x+8y+5$ の最小値と、そのときの $x,\ y$ の値を求めなさい。

Lv.4 (4) $x,\ y$ が実数のとき、$Q=x^2-2xy+2y^2-4y+7$ の最小値と、そのときの $x,\ y$ の値を求めなさい。

計算・解答スペース

8 おき換えを利用する最大・最小 重要度 ★★★☆☆

◆ 次の関数に最大値、最小値があれば、それを求めなさい。

Lv.2 (1) $y = x^4 + 2x^2 - 3$

Lv.3 (2) $y = x^4 - 4x^2 + 3$

Lv.4 (3) $y = (x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) + 3 \ (-2 \leqq x \leqq 1)$

計算・解答スペース

9 2次関数の決定（1） 頂点・軸の条件 重要度 ★★★★★

◆ グラフが次の条件を満たす 2 次関数を求めなさい。

Lv.1 (1) 頂点が点 $(1,\ -3)$ で、点 $(3,\ 5)$ を通る。

Lv.2 (2) 軸が直線 $x=-2$ で、2 点 $(0,\ 1)$, $(-1,\ -2)$ を通る。

Lv.3 (3) 頂点が x 軸上にあり、2 点 $(0,\ 4)$, $(3,\ 1)$ を通る。

Lv.4 (4) 放物線 $y=x^2$ を平行移動したもので、点 $(1,\ 3)$ を通り、頂点が直線 $y=2x+1$ 上にある。

計算・解答スペース

10 2次関数の決定（2） 3点・交点の条件 重要度 ★★★★★

◆ グラフが次の条件を満たす 2 次関数を求めなさい。

Lv.2 (1) 3 点 $(0,\ 3)$, $(1,\ 0)$, $(-1,\ 8)$ を通る。

Lv.3 (2) 3 点 $(-1,\ 6)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 3)$ を通る。

Lv.3 (3) x 軸と 2 点 $(-1,\ 0)$, $(3,\ 0)$ で交わり、点 $(1,\ -8)$ を通る。

Lv.4 (4) 3 点 $(-2,\ 7)$, $(4,\ 7)$, $(1,\ -2)$ を通る。

計算・解答スペース

解答・解説

1

【考え方・テクニック】

まず平方完成して $y=a(x-p)^2+q$ の形にし、グラフをかきます。定義域がなければ頂点で最大（上に凸）または最小（下に凸）。定義域があるときは「頂点」と「定義域の両端」の y の値を比べ、端点が含まれるかにも注意します。

【正答】

(1)　$x=2$ で最小値 3、最大値はない。

(2)　$x=-2$ で最大値 9、最小値はない。

(3)　$x=2$ で最大値 7、$x=-1$ で最小値 -2

(4)　$x=0$ で最小値 -4、最大値はない。

【解説】

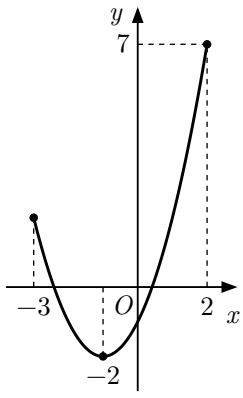
(1)　$y=(x-2)^2+3$ です。

(2)　$y=-2(x+2)^2+9$ です。

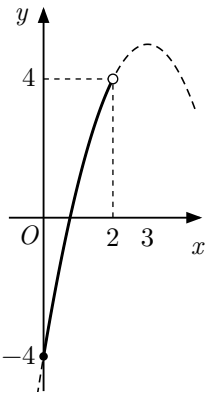
(3)　$y=(x+1)^2-2$。軸 $x=-1$ は定義域内。$x=-3$ のとき $y=2$、$x=2$ のとき $y=7$ です。

(4)　$y=-(x-3)^2+5$。軸 $x=3$ は定義域の右外にあるので、$0\leqq x<2$ では x が増えると y も増えます。$x=2$ は含まれないので $y=4$ にはならず、最大値はありません。

(3)



(4)



2

【考え方・テクニック】

定義域の右端 a が動くので、グラフ（軸 $x=3$）と定義域の位置関係で場合分けします。最小値は「軸が定義域に含まれるか」、最大値（下に凸）は「軸から遠い端はどちらか」、つまり定義域の中央 $\frac{a}{2}$ と軸の位置関係で決まります。

【正答】

(1) $\begin{cases} 0<a<3 \text{ のとき} & x=a \text{ で最小値 } a^2-6a+5 \\ a \geqq 3 \text{ のとき} & x=3 \text{ で最小値 } -4 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 0<a<6 \text{ のとき} & x=0 \text{ で最大値 } 5 \\ a=6 \text{ のとき} & x=0,\ 6 \text{ で最大値 } 5 \\ a>6 \text{ のとき} & x=a \text{ で最大値 } a^2-6a+5 \end{cases}$

【解説】

$f(x)=(x-3)^2-4$ で、グラフは下に凸、軸は直線 $x=3$ です。

(1) $0<a<3$ のとき軸は定義域の右外にあり、$f(x)$ は減少し続けるので $x=a$ で最小。$a \geqq 3$ のとき軸が定義域に含まれ、頂点で最小となります。

(2) 定義域の中央は $x=\frac{a}{2}$。$\frac{a}{2}<3$ のとき軸から遠いのは左端 $x=0$、$\frac{a}{2}=3$ のとき両端は軸から等距離、$\frac{a}{2}>3$ のとき右端 $x=a$ が遠くなります。

3

【考え方・テクニック】

$f(x)=(x-a)^2-a^2+3$ より軸は直線 $x=a$ で、a の値によって軸（グラフ）が左右に動きます。最小値は軸が区間 $0 \leqq x \leqq 4$ の左外・内・右外のどこにあるか、最大値は軸と区間の中央 $x=2$ の位置関係で場合分けします。

【正答】

(1) $\begin{cases} a<0 \text{ のとき} & x=0 \text{ で最小値 } 3 \\ 0 \leqq a \leqq 4 \text{ のとき} & x=a \text{ で最小値 } -a^2+3 \\ a>4 \text{ のとき} & x=4 \text{ で最小値 } 19-8a \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a<2 \text{ のとき} & x=4 \text{ で最大値 } 19-8a \\ a=2 \text{ のとき} & x=0,\ 4 \text{ で最大値 } 3 \\ a>2 \text{ のとき} & x=0 \text{ で最大値 } 3 \end{cases}$

【解説】

$f(0)=3$、$f(4)=16-8a+3=19-8a$、$f(a)=-a^2+3$ です。

(1) 軸が区間の左外（$a<0$）なら左端、区間内（$0 \leqq a \leqq 4$）なら頂点、右外（$a>4$）なら右端で最小です。

(2) 下に凸なので、軸から遠い端で最大です。$a<2$ なら右端 $x=4$ が遠く、$a>2$ なら左端 $x=0$ が遠くなります。$a=2$ のときは $f(0)=f(4)=3$ です。

4

【考え方・テクニック】

今度はグラフ（軸 $x=2$）が固定され、幅 2 の定義域 $a \leqq x \leqq a+2$ が左右に動きます。最小値は軸が定義域の右外・内・左外のどこにあるか、最大値は定義域の中央 $x=a+1$ と軸の位置関係で場合分けします。

【正答】

(1) $\begin{cases} a<0 \text{ のとき} & x=a+2 \text{ で最小値 } a^2-3 \\ 0 \leqq a \leqq 2 \text{ のとき} & x=2 \text{ で最小値 } -3 \\ a>2 \text{ のとき} & x=a \text{ で最小値 } a^2-4a+1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a<1 \text{ のとき} & x=a \text{ で最大値 } a^2-4a+1 \\ a=1 \text{ のとき} & x=1,\ 3 \text{ で最大値 } -2 \\ a>1 \text{ のとき} & x=a+2 \text{ で最大値 } a^2-3 \end{cases}$

【解説】

$f(x)=(x-2)^2-3$、$f(a+2)=(a+2)^2-4(a+2)+1=a^2-3$ です。

(1) $a+2<2$（$a<0$）のとき定義域は軸の左側にあり右端で最小、$a \leqq 2 \leqq a+2$（$0 \leqq a \leqq 2$）のとき頂点で最小、$a>2$ のとき左端で最小です。

(2) 中央 $a+1$ が軸より左（$a<1$）なら左端 $x=a$、右（$a>1$）なら右端 $x=a+2$ が軸から遠く、最大になります。

5

【考え方・テクニック】

最大値・最小値を文字で表し、条件から方程式を作ります。x^2 の係数が文字のときは、$a>0$（下に凸）と $a<0$（上に凸）で最大・最小となる場所が入れ替わるので、場合分けが必要です。

【正答】

(1)　$m=-k^2+4k$、$k=2$ のとき最大値 4

(2)　$c=1$、$x=0$ で最小値 1

(3)　$a=2,\ b=0$ または $a=-2,\ b=4$

【解説】

(1)　$y=(x-k)^2-k^2+4k$ より $m=-k^2+4k=-(k-2)^2+4$ です。

(2)　$y=-(x-2)^2+c+4$。軸 $x=2$ は定義域内なので最大値は $c+4=5$、$c=1$。最小値は軸から遠い $x=0$ で $y=1$（$x=3$ では $y=4$）です。

(3)　$f(x)=a(x-1)^2-a+b$。$a>0$ のとき、最小値 $f(1)=-a+b=-2$、最大値 $f(3)=3a+b=6$ から $a=2,\ b=0$。$a<0$ のとき、最大値 $f(1)=-a+b=6$、最小値 $f(3)=3a+b=-2$ から $a=-2,\ b=4$。$a=0$ のとき $f(x)=b$ で不適です。

6

【考え方・テクニック】

最大・最小を考える量を 1 つの文字（変数）の 2 次式で表し、平方完成します。変数のとりうる値の範囲（変域）を必ず確認しましょう。長さの 2 乗のように、正の量はその 2 乗が最小のとき自身も最小になります。

【正答】

(1) 縦 $5\ \mathrm{cm}$（正方形）のとき、面積は最大で $25\ \mathrm{cm}^2$

(2) 直角をはさむ 2 辺がともに 6 のとき、斜辺の長さは最小で $6\sqrt{2}$

(3) 3 秒後、面積 9

【解説】

(1) 縦を $x\ \mathrm{cm}$ とすると横は $(10-x)\ \mathrm{cm}$、$0<x<10$。面積
$S=x(10-x)=-(x-5)^2+25$ です。

(2) 1 辺を x とすると他方は $12-x$、$0<x<12$。斜辺を l とすると
$l^2=x^2+(12-x)^2=2(x-6)^2+72$ で、$x=6$ のとき l^2 は最小値 72、$l=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$ です。

(3) t 秒後に $PB=6-t$，$BQ=2t$。Q が C に着くのは 4 秒後なので $0<t\leqq 4$。面積は
$\frac{1}{2}(6-t)\cdot 2t=-(t-3)^2+9$ で、$t=3$ のとき最大値 9 です。

7

【考え方・テクニック】

条件式があるときは 1 文字を消去して 1 変数の 2 次関数にします。このとき、残す文字の変域（$x \geqq 0$ などから決まる）に注意します。条件式がないときは、一方の文字について平方完成し、$(\ )^2 \geqq 0$ を利用します。

【正答】

(1)　$x=\frac{4}{5},\ y=\frac{8}{5}$ のとき最小値 $\frac{16}{5}$

(2)　$x=y=3$ のとき最大値 9、$(x,\ y)=(0,\ 6),\ (6,\ 0)$ のとき最小値 0

(3)　$x=1,\ y=-2$ のとき最小値 -4

(4)　$x=2,\ y=2$ のとき最小値 3

【解説】

(1)　$x=4-2y$ を代入して $x^2+y^2=5y^2-16y+16=5\left(y-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{16}{5}$。$y=\frac{8}{5}$ のとき $x=4-\frac{16}{5}=\frac{4}{5}$ です。

(2)　$y=6-x\geqq 0$ より $0\leqq x\leqq 6$。$xy=x(6-x)=-(x-3)^2+9$ です。

(3)　$P=(x-1)^2+2(y+2)^2-4$ で、$(x-1)^2\geqq 0$，$(y+2)^2\geqq 0$ です。

(4)　x について平方完成すると $Q=(x-y)^2+y^2-4y+7=(x-y)^2+(y-2)^2+3$。
$x-y=0$，$y-2=0$ のとき最小となります。

8

【考え方・テクニック】

同じ式のかたまりを t とおくと 2 次関数になります。おき換えたら必ず t の変域を調べましょう（$t=x^2$ なら $t \geqq 0$）。最後は t の値から x の値に戻して答えます。

【正答】

(1) $x=0$ で最小値 -3、最大値はない。

(2) $x=\pm\sqrt{2}$ で最小値 -1、最大値はない。

(3) $x=-1,\ 1$ で最大値 6、$x=-1+\sqrt{2}$ で最小値 2

【解説】

(1) $t=x^2\ (t \geqq 0)$ とおくと $y=t^2+2t-3=(t+1)^2-4$。$t \geqq 0$ では増加するので $t=0$ で最小です。

(2) $t=x^2\ (t \geqq 0)$ とおくと $y=t^2-4t+3=(t-2)^2-1$。$t=2$ のとき $x=\pm\sqrt{2}$ です。

(3) $t=x^2+2x=(x+1)^2-1$ とおくと、$-2 \leqq x \leqq 1$ より $-1 \leqq t \leqq 3$。
$y=t^2-2t+3=(t-1)^2+2$ で、$t=1$ のとき最小値 2。$x^2+2x=1$ から
$x=-1\pm\sqrt{2}$、範囲内は $x=-1+\sqrt{2}$。最大は $t=-1$（$x=-1$）と $t=3$（$x=1$）でともに $y=6$ です。

9

【考え方・テクニック】

頂点や軸の情報があるときは、基本形 $y=a(x-p)^2+q$ からスタートします。頂点が x 軸上 → $q=0$、 $y=x^2$ を平行移動 → $a=1$、頂点が直線上 → q を p で表す、のように条件を式にします。

【正答】

(1) $y=2(x-1)^2-3$ $(y=2x^2-4x-1)$

(2) $y=(x+2)^2-3$ $(y=x^2+4x+1)$

(3) $y=(x-2)^2$, $y=\frac{1}{9}(x-6)^2$

(4) $y=(x-1)^2+3$, $y=(x+1)^2-1$

【解説】

(2) $y=a(x+2)^2+q$ に 2 点を代入して $4a+q=1$, $a+q=-2$。これを解いて $a=1$, $q=-3$ です。

(3) $y=a(x-p)^2$ とおくと $ap^2=4$, $a(3-p)^2=1$。2 式から $(3-p)^2=\frac{p^2}{4}$ より $3-p=\pm\frac{p}{2}$、 $p=2,\ 6$。それぞれ $a=1,\ \frac{1}{9}$ です。

(4) 頂点を $(p,\ 2p+1)$ とおくと $y=(x-p)^2+2p+1$。点 $(1,\ 3)$ を通るので $3=(1-p)^2+2p+1$、 $p^2=1$ から $p=\pm1$ です。

10

【考え方・テクニック】

通る 3 点がわかっているときは一般形 $y=ax^2+bx+c$ に代入して連立 3 元 1 次方程式を解きます。x 軸との交点 $(\alpha,\,0)$，$(\beta,\,0)$ がわかっているときは分解形 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ が便利です。y 座標が等しい 2 点があれば、放物線の対称性から軸がわかります。

【正答】

(1)　$y=x^2-4x+3$

(2)　$y=x^2-2x+3$

(3)　$y=2(x+1)(x-3)$ $(y=2x^2-4x-6)$

(4)　$y=(x-1)^2-2$ $(y=x^2-2x-1)$

【解説】

(1)　$c=3$，$a+b+c=0$，$a-b+c=8$ を解いて $a=1,\,b=-4,\,c=3$ です。

(2)　$a-b+c=6$ …①，$a+b+c=2$ …②，$4a+2b+c=3$ …③。②-① から $b=-2$。これを代入すると $a+c=4$，$4a+c=7$ から $a=1,\,c=3$ です。

(3)　$y=a(x+1)(x-3)$ に $(1,\,-8)$ を代入して $-8=-4a$、$a=2$ です。

(4)　2 点 $(-2,\,7)$，$(4,\,7)$ は軸に関して対称なので、軸は直線 $x=\dfrac{-2+4}{2}=1$。よって頂点は $(1,\,-2)$ で、$y=a(x-1)^2-2$ に $(4,\,7)$ を代入して $9a-2=7$、$a=1$ です。