高校数学ＩＡ　単元別演習ドリル

# 第 3 章 2次関数（1）

関数とグラフ ／ 2次関数のグラフ ／ グラフの移動

## 目次


**1** 関数の値・座標平面 …… 1

**2** 1次関数の値域・最大値・最小値 …… 2

**3** 絶対値を含む関数のグラフ …… 3

**4** ガウス記号・区間で式が変わる関数 …… 4

**5** 2次関数のグラフ（1） $y = a(x-p)^2 + q$ …… 5

**6** 2次関数のグラフ（2） 平方完成 …… 6

**7** グラフから係数の符号を判定 …… 7

**8** グラフの平行移動 …… 8

**9** 対称移動・移動と係数の決定 …… 9

解答・解説 …… 10

# 1　関数の値・座標平面　重要度 ★★★★☆

◆ 次の問いに答えなさい。

**Lv.1** (1) $f(x)=3x-5$ のとき、$f(2)$, $f(-1)$, $f(0)$ の値を求めなさい。

**Lv.2** (2) $g(x)=-2x^2+3x+1$ のとき、$g(-2)$, $g\left(\frac{1}{2}\right)$ の値を求めなさい。

**Lv.3** (3) $f(x)=x^2-4x$ のとき、$f(a+1)$, $f(-2a)$ を $a$ の式で表しなさい。

**Lv.3** (4) 点 $(2a-1,\ a+3)$ が第 2 象限にあるような、定数 $a$ の値の範囲を求めなさい。

---

計算・解答スペース

# 2 1次関数の値域・最大値・最小値 重要度 ★★★★☆

◆ 次の問いに答えなさい。

**Lv.1** $(1)$ 関数 $y = 2x - 1\,(-1 \leqq x \leqq 3)$ の値域を求めなさい。

**Lv.2** $(2)$ 関数 $y = -3x + 4\,(-2 < x \leqq 1)$ の値域を求めなさい。また、最大値・最小値があれば求めなさい。

**Lv.3** $(3)$ 関数 $f(x) = ax + 3\,(0 \leqq x \leqq 2)$ の最大値が $7$ となるような、定数 $a$ の値を求めなさい。

**Lv.4** $(4)$ 関数 $y = ax + b\,(1 \leqq x \leqq 3)$ の値域が $-1 \leqq y \leqq 5$ であるとき、定数 $a,\ b$ の値を求めなさい。

---

計算・解答スペース

# 3 絶対値を含む関数のグラフ　重要度 ★★★☆☆

◆ 次の関数のグラフをかきなさい。

Lv.2 (1) $y = |x-3|$

Lv.3 (2) $y = |2x+4|$

Lv.3 (3) $y = |x+1| + |x-2|$

◆ (3) のグラフを利用して、次の不等式を解きなさい。

Lv.4 (4) $|x+1| + |x-2| \leqq 5$

---

計算・解答スペース

# 4 ガウス記号・区間で式が変わる関数 重要度 ★★☆☆☆

◆ $[x]$ は実数 $x$ を超えない最大の整数を表す。次の問いに答えなさい。

**Lv.2** $(1)$ $[3.7]$, $\left[-\frac{5}{2}\right]$, $[\sqrt{5}]$ の値を求めなさい。

**Lv.3** $(2)$ 関数 $y=[x]\ (-1 \leqq x \leqq 2)$ のグラフをかきなさい。

◆ 関数 $f(x)=\begin{cases} 2x & (0 \leqq x<1) \\ 4-2x & (1 \leqq x \leqq 2) \end{cases}$ について、次の問いに答えなさい。

**Lv.3** $(3)$ $y=f(x)$ のグラフをかき、値域を求めなさい。

**Lv.4** $(4)$ 方程式 $f(x)=\frac{3}{2}$ を解きなさい。

---

計算・解答スペース

# 5 2次関数のグラフ（1） $y=a(x-p)^2+q$ 重要度 ★★★★★

◆ 次の 2 次関数のグラフは、$y=2x^2$ のグラフをどのように平行移動したものか答えなさい。また、軸と頂点を求めなさい。

**Lv.1** (1) $y=2x^2-3$

**Lv.1** (2) $y=2(x+1)^2$

**Lv.2** (3) $y=2(x-3)^2+1$

◆ 次の 2 次関数のグラフをかきなさい。

**Lv.2** (4) $y=-(x-2)^2+4$

---

計算・解答スペース

# 6 2次関数のグラフ（2） 平方完成 重要度 ★★★★★

◆ 次の 2 次関数を $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形し、グラフの軸と頂点を求めなさい。

**Lv.1** (1) $y=x^2-6x+5$

**Lv.2** (2) $y=2x^2+8x+3$

**Lv.3** (3) $y=-x^2+3x-1$

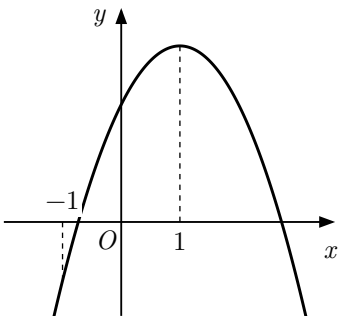
**Lv.3** (4) $y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2}$

---

計算・解答スペース

# 7 グラフから係数の符号を判定 重要度 ★★★★☆

◆ 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが下の図のようになるとき、次の値の符号を調べなさい。




**Lv.2** (1) $a,\ b,\ c$

**Lv.3** (2) $b^2 - 4ac$

**Lv.3** (3) $a + b + c$

**Lv.4** (4) $a - b + c$

---

計算・解答スペース

# 8 グラフの平行移動 重要度 ★★★★★

◆ 次の問いに答えなさい。

**Lv.2** (1) 放物線 $y = x^2 + 2x + 3$ を、$x$ 軸方向に $2$、$y$ 軸方向に $-3$ だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めなさい。

**Lv.2** (2) 放物線 $y = -2x^2 + 4x - 1$ を、$x$ 軸方向に $-1$、$y$ 軸方向に $2$ だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めなさい。

**Lv.3** (3) 放物線 $y = x^2 - 4x + 1$ をどのように平行移動すると、放物線 $y = x^2 + 2x + 5$ に重なるか答えなさい。

**Lv.4** (4) $x$ 軸方向に $1$、$y$ 軸方向に $-2$ だけ平行移動すると、放物線 $y = 2x^2 - 3x + 4$ に重なるような放物線 $C$ の方程式を求めなさい。

---

計算・解答スペース

# 9 対称移動・移動と係数の決定 重要度 ★★★★☆

◆ 次の問いに答えなさい。

**Lv.1** (1) 点 $(2, -5)$ を $x$ 軸、$y$ 軸、原点に関してそれぞれ対称移動した点の座標を求めなさい。

**Lv.2** (2) 放物線 $y = x^2 - 3x + 2$ を $x$ 軸、$y$ 軸、原点に関してそれぞれ対称移動した放物線の方程式を求めなさい。

**Lv.3** (3) 放物線 $y = 2x^2 + 4x + 5$ を原点に関して対称移動し、さらに $y$ 軸方向に $3$ だけ平行移動した放物線の方程式を求めなさい。

**Lv.4** (4) 放物線 $y = x^2 + ax + b$ を $x$ 軸に関して対称移動し、さらに $x$ 軸方向に $2$、$y$ 軸方向に $-1$ だけ平行移動したところ、放物線 $y = -x^2 + 6x - 4$ になった。定数 $a,\ b$ の値を求めなさい。

---

計算・解答スペース

# 解答・解説

## 1

【考え方・テクニック】

$f(a)$ は $f(x)$ の $x$ に $a$ を代入した値です。式を代入するときは必ず（ ）をつけます。座標平面の象限は、第 1 象限 $(+, +)$、第 2 象限 $(-, +)$、第 3 象限 $(-, -)$、第 4 象限 $(+, -)$ です。

【正答】

(1) $f(2)=1$, $f(-1)=-8$, $f(0)=-5$

(2) $g(-2)=-13$, $g\left(\frac{1}{2}\right)=2$

(3) $f(a+1)=a^2-2a-3$, $f(-2a)=4a^2+8a$

(4) $-3<a<\frac{1}{2}$

【解説】

(2) $g(-2)=-2\cdot(-2)^2+3\cdot(-2)+1=-8-6+1=-13$、$g\left(\frac{1}{2}\right)=-2\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+1=2$ です。

(3) $f(a+1)=(a+1)^2-4(a+1)=a^2+2a+1-4a-4=a^2-2a-3$、$f(-2a)=(-2a)^2-4\cdot(-2a)=4a^2+8a$ です。

(4) 第 2 象限にある条件は「$x$ 座標 $<0$ かつ $y$ 座標 $>0$」です。$2a-1<0$ より $a<\frac{1}{2}$、$a+3>0$ より $a>-3$。共通範囲を求めて $-3<a<\frac{1}{2}$ です。

## 2

【考え方・テクニック】

1 次関数のグラフは直線なので、最大・最小は定義域の両端でとります。グラフをかいて、端点が含まれるか（●）含まれないか（○）を確認しましょう。傾きが文字のときは $a>0$, $a=0$, $a<0$ で場合分けします。

【正答】

(1) $-3 \leqq y \leqq 5$

(2) 値域は $1 \leqq y < 10$。$x=1$ で最小値 1、最大値はない。

(3) $a=2$

(4) $a=3,\ b=-4$ または $a=-3,\ b=8$

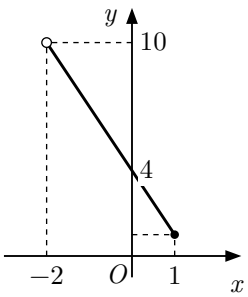
【解説】

(2) $x=-2$ は定義域に含まれないので、$y=10$ にはなりません。よって最大値はありません（下の図）。

(3) $a>0$ のとき $x=2$ で最大となり $2a+3=7$ から $a=2$（$a>0$ を満たす）。$a=0$ のとき $f(x)=3$、$a<0$ のとき $x=0$ で最大値 3 となり、いずれも不適です。

(4) $a>0$ のとき $x=1$ で $y=-1$、$x=3$ で $y=5$ より $a+b=-1$, $3a+b=5$ を解いて $a=3,\ b=-4$。$a<0$ のとき $a+b=5$, $3a+b=-1$ を解いて $a=-3,\ b=8$。$a=0$ は不適です。

(2) $y=-3x+4\ (-2<x\leqq 1)$ のグラフ



## 3

【考え方・テクニック】

$A \geqq 0$ のとき $|A| = A$、$A < 0$ のとき $|A| = -A$ です。絶対値の中身が $0$ になる $x$ の値で場合分けし、それぞれの範囲で直線をかいてつなぎます。不等式は、グラフが直線 $y = 5$ 以下となる $x$ の範囲を読み取ります。

【正答】

(1)　下の図（頂点 $(3,\ 0)$ の折れ線）

(2)　下の図（頂点 $(-2,\ 0)$ の折れ線）

(3)　下の図

(4)　$-2 \leqq x \leqq 3$

【解説】

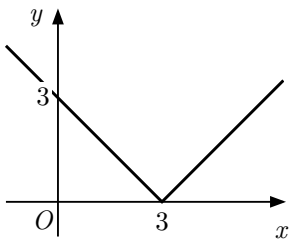
(1)　$x \geqq 3$ のとき $y = x - 3$、$x < 3$ のとき $y = -x + 3$ です。

(2)　$x \geqq -2$ のとき $y = 2x + 4$、$x < -2$ のとき $y = -2x - 4$ です。

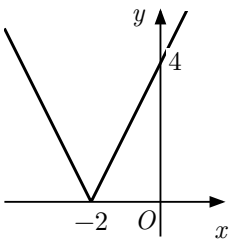
(3)　$x < -1$ のとき $y = -(x+1) - (x-2) = -2x + 1$、$-1 \leqq x < 2$ のとき $y = (x+1) - (x-2) = 3$、$x \geqq 2$ のとき $y = (x+1) + (x-2) = 2x - 1$ です。

(4)　$-2x + 1 = 5$ から $x = -2$、$2x - 1 = 5$ から $x = 3$。$-1 \leqq x < 2$ では $y = 3 \leqq 5$ なので、求める範囲は $-2 \leqq x \leqq 3$ です。

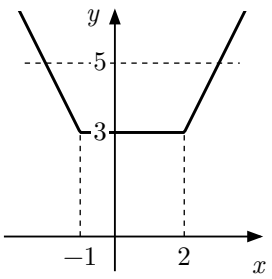
(1)




(2)




(3)



## 4

**【考え方・テクニック】**

$n$ が整数のとき、$n \leqq x < n+1$ ならば $[x] = n$ です。負の数では「小さい方の整数」になることに注意します（$[-2.5] = -3$）。区間で式が変わる関数は、区間ごとに式を使い分けて考えます。

【正答】

(1) $[3.7] = 3$, $\left[-\frac{5}{2}\right] = -3$, $[\sqrt{5}] = 2$

(2) 下の図

(3) 下の図、値域は $0 \leqq y \leqq 2$

(4) $x = \frac{3}{4}, \frac{5}{4}$

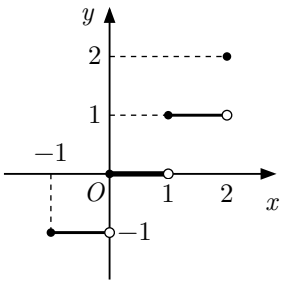
【解説】

(1) $-3 \leqq -\frac{5}{2} < -2$ より $\left[-\frac{5}{2}\right] = -3$。$2 < \sqrt{5} < 3$ より $[\sqrt{5}] = 2$ です。

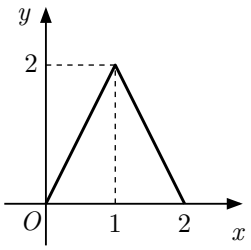
(2) $-1 \leqq x < 0$ で $y = -1$、$0 \leqq x < 1$ で $y = 0$、$1 \leqq x < 2$ で $y = 1$、$x = 2$ で $y = 2$ です。

(4) $0 \leqq x < 1$ のとき $2x = \frac{3}{2}$ から $x = \frac{3}{4}$（適する）。$1 \leqq x \leqq 2$ のとき $4 - 2x = \frac{3}{2}$ から $x = \frac{5}{4}$（適する）。

(2)




(3)



**5**

【考え方・テクニック】

$y=a(x-p)^2+q$ のグラフは、$y=ax^2$ のグラフを $x$ 軸方向に $p$、$y$ 軸方向に $q$ だけ平行移動した放物線で、軸は直線 $x=p$、頂点は点 $(p,\ q)$ です。$(x+1)^2=(x-(-1))^2$ なので $p=-1$ となる点に注意しましょう。

【正答】

(1)　$y$ 軸方向に $-3$ だけ平行移動。軸は $y$ 軸（直線 $x=0$）、頂点は点 $(0,\ -3)$

(2)　$x$ 軸方向に $-1$ だけ平行移動。軸は直線 $x=-1$、頂点は点 $(-1,\ 0)$

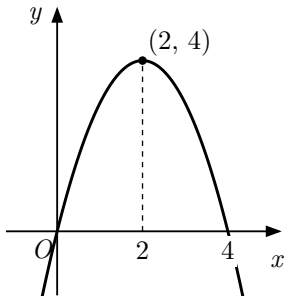
(3)　$x$ 軸方向に $3$、$y$ 軸方向に $1$ だけ平行移動。軸は直線 $x=3$、頂点は点 $(3,\ 1)$

(4)　下の図（上に凸、頂点 $(2,\ 4)$、原点と点 $(4,\ 0)$ を通る）

【解説】

(4)　$x^2$ の係数が負なので上に凸です。$x=0$ のとき $y=0$、$y=0$ のとき $(x-2)^2=4$ から $x=0,\ 4$ です。

(4)　$y=-(x-2)^2+4$



## 6

【考え方・テクニック】

$x^2$ の係数で $x^2$ と $x$ の項をくくり、$x^2+●x=\left(x+\dfrac{●}{2}\right)^2-\left(\dfrac{●}{2}\right)^2$ を使います。くくり出した係数をかけ戻すときの符号ミスに注意しましょう。

【正答】

(1)　$y=(x-3)^2-4$　軸は直線 $x=3$、頂点は点 $(3,\ -4)$

(2)　$y=2(x+2)^2-5$　軸は直線 $x=-2$、頂点は点 $(-2,\ -5)$

(3)　$y=-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}$　軸は直線 $x=\dfrac{3}{2}$、頂点は点 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{4}\right)$

(4)　$y=\dfrac{1}{2}(x-1)^2+2$　軸は直線 $x=1$、頂点は点 $(1,\ 2)$

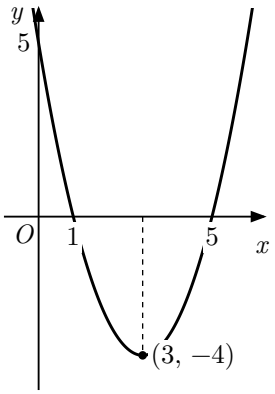
【解説】

(2)　$y=2(x^2+4x)+3=2\{(x+2)^2-4\}+3=2(x+2)^2-5$

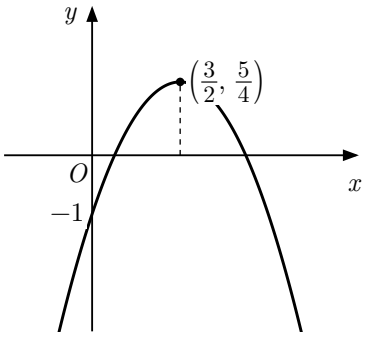
(3)　$y=-(x^2-3x)-1=-\left\{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}\right\}-1=-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}$

(4)　$y=\dfrac{1}{2}(x^2-2x)+\dfrac{5}{2}=\dfrac{1}{2}\{(x-1)^2-1\}+\dfrac{5}{2}=\dfrac{1}{2}(x-1)^2+2$

(1)　$y=x^2-6x+5$




(3)　$y=-x^2+3x-1$



**7**

【考え方・テクニック】

グラフの凹凸で $a$、軸 $x=-\frac{b}{2a}$ の位置で $b$、$y$ 軸との交点 $(0,\ c)$ で $c$ の符号がわかります。$a+b+c$ は $x=1$ のときの $y$ の値、$a-b+c$ は $x=-1$ のときの $y$ の値です。

【正答】

(1)　$a<0,\ b>0,\ c>0$

(2)　$b^2-4ac>0$

(3)　$a+b+c>0$

(4)　$a-b+c<0$

【解説】

(1)　上に凸なので $a<0$。軸 $x=-\frac{b}{2a}$ が $y$ 軸より右にあるので $-\frac{b}{2a}>0$、$a<0$ より $b>0$。$y$ 軸と正の部分で交わるので $c>0$ です。

(2)　頂点の $y$ 座標 $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ が正で、$a<0$ より $b^2-4ac>0$ です（$x$ 軸と 2 点で交わることからもわかります）。

(3)　$x=1$ のとき $y=a+b+c$ で、図より正です。

(4)　$x=-1$ のとき $y=a-b+c$ で、図より負です。

**8**

【考え方・テクニック】

放物線の平行移動は「頂点の移動」に注目するのが確実です。または、曲線 $y=f(x)$ を $x$ 軸方向に $p$、$y$ 軸方向に $q$ だけ平行移動した曲線は $y-q=f(x-p)$ と表せます（$x \to x-p$, $y \to y-q$ と置き換える）。

【正答】

(1) $y=x^2-2x$

(2) $y=-2x^2+3$

(3) $x$ 軸方向に $-3$、$y$ 軸方向に $7$ だけ平行移動する。

(4) $y=2x^2+x+5$

【解説】

(1) $y=(x+1)^2+2$ の頂点 $(-1,\ 2)$ が $(1,\ -1)$ に移るので $y=(x-1)^2-1=x^2-2x$ です。

(2) $y=-2(x-1)^2+1$ の頂点 $(1,\ 1)$ が $(0,\ 3)$ に移るので $y=-2x^2+3$ です。

(3) $y=(x-2)^2-3$ の頂点 $(2,\ -3)$ と、$y=(x+1)^2+4$ の頂点 $(-1,\ 4)$ を比べます。$-1-2=-3$, $4-(-3)=7$ です。

(4) 逆の移動を考え、$y=2x^2-3x+4$ を $x$ 軸方向に $-1$、$y$ 軸方向に $2$ だけ平行移動します。$y-2=2(x+1)^2-3(x+1)+4$ より $y=2x^2+x+5$ です。

**9**

【考え方・テクニック】

$y=f(x)$ を $x$ 軸に関して対称移動 → $-y=f(x)$、$y$ 軸に関して → $y=f(-x)$、原点に関して → $-y=f(-x)$ です。移動が 2 回以上あるときは、順番どおりに 1 つずつ式を作ります。

【正答】

(1) $x$ 軸：$(2,\ 5)$、$y$ 軸：$(-2,\ -5)$、原点：$(-2,\ 5)$

(2) $x$ 軸：$y=-x^2+3x-2$、$y$ 軸：$y=x^2+3x+2$、原点：$y=-x^2-3x-2$

(3) $y=-2x^2+4x-2$

(4) $a=-2,\ b=-5$

【解説】

(3) 原点に関して対称移動すると $-y=2(-x)^2+4(-x)+5$ より $y=-2x^2+4x-5$。さらに $y$ 軸方向に 3 移動して $y=-2x^2+4x-2$ です。

(4) $x$ 軸に関して対称移動すると $y=-x^2-ax-b$。さらに平行移動すると $y+1=-(x-2)^2-a(x-2)-b$、すなわち $y=-x^2+(4-a)x+2a-b-5$。これが $y=-x^2+6x-4$ と一致するので $4-a=6$，$2a-b-5=-4$。よって $a=-2,\ b=-5$ です。