高校数学ＩＡ　単元別演習ドリル

第 2 章　集合と命題

集合 ／ 命題 ／ 条件と証明

目次

1　集合と要素・部分集合 …… 1

2　共通部分・和集合・ベン図 …… 2

3　補集合・ド・モルガンの法則 …… 3

4　命題と条件 …… 4

5　逆・裏・対偶 …… 5

6　必要条件・十分条件 …… 6

7　命題の否定 …… 7

8　対偶による証明 …… 8

9　背理法・総合問題 …… 9

解答・解説 …… 10

1 集合と要素・部分集合　重要度 ★★★★★

◆ 次の問いに答えなさい。

Lv.1 (1) 全体集合を $U = \{1, 2, 3, \cdots, 10\}$ とする。$A = \{x \in U \mid x \text{ は偶数}\}$ を要素を書き並べて表しなさい。

Lv.1 (2) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B = \{3, 4, 5, 6\}$ のとき、$A \cap B$ を求めなさい。

Lv.2 (3) $A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{1, 2, 3, 4\}$ のとき、$A \subset B$ であることを説明しなさい。

Lv.2 (4) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ とする。$B = \{x \in A \mid x^2 < 4\}$ を要素を書き並べて表しなさい。

計算・解答スペース

2 共通部分・和集合・ベン図　重要度 ★★★★★

◆ 次の問いに答えなさい。

Lv.1 (1) $U = \{1, 2, 3, \cdots, 10\}$，$A$ を 2 の倍数の集合、B を 3 の倍数の集合とする。$A \cap B$ と $A \cup B$ を求めなさい。

Lv.2 (2) 40 人の生徒に英語と歴史の学習状況を調べたところ、英語を学習している生徒は 25 人、歴史を学習している生徒は 18 人、両方を学習している生徒は 10 人であった。どちらも学習していない生徒は何人か。

Lv.2 (3) $A = \{1, 2, 3, 4\}$，$B = \{3, 4, 5\}$，$C = \{2, 4, 5\}$ のとき、$(A \cap B) \cup C$ を求めなさい。

Lv.3 (4) 1 から 20 までの整数の集合で、2 の倍数の集合を A、5 の倍数の集合を B とする。$A \cap B$ の要素の個数を求めなさい。

計算・解答スペース

3 補集合・ド・モルガンの法則　重要度 ★★★★★

◆ 全体集合を意識して、次の問いに答えなさい。

Lv.1 (1) $U = \{1, 2, 3, \cdots, 12\}$，$A = \{3, 6, 9, 12\}$ とする。A の補集合を求めなさい。

Lv.2 (2) $U = \{1, 2, 3, \cdots, 10\}$ で、A を 2 の倍数の集合、B を 3 の倍数の集合とする。$\overline{A} \cap \overline{B}$ と $\overline{A \cup B}$ をそれぞれ求めなさい。

Lv.3 (3) 次の集合を簡単にしなさい。　$\overline{A \cup B}$

Lv.3 (4) A を「数学部に所属する生徒の集合」、B を「科学部に所属する生徒の集合」とする。「どちらの部にも所属しない生徒の集合」を A, B を用いて表しなさい。

計算・解答スペース

4 命題と条件　重要度 ★★★★☆

◆ 次の問いに答えなさい。

Lv.1 (1) 命題「7 は素数である」の真偽を答えなさい。

Lv.2 (2) 実数 x について、p：$x > 3$，q：$x^2 > 9$ とする。命題 $p \Rightarrow q$ と $q \Rightarrow p$ の真偽をそれぞれ答えなさい。

Lv.2 (3) 正の整数 n について、p：n は 6 の倍数である，q：n は偶数であるとする。p は q の何条件か答えなさい。

Lv.1 (4) 命題「$x = 2$ ならば $x^2 = 4$」の仮定と結論をそれぞれ答えなさい。

計算・解答スペース

5 逆・裏・対偶　重要度 ★★★★★

◆ 次の命題について、問いに答えなさい。

Lv.2 (1) 実数 x について、命題「$x > 3$ ならば $x^2 > 9$」の逆、裏、対偶をそれぞれ述べ、それぞれの真偽を答えなさい。

Lv.2 (2) 正の整数 n について、命題「n が 4 の倍数ならば、n は偶数である」の逆を述べ、その真偽を答えなさい。

Lv.2 (3) 命題とその対偶の真偽には、どのような関係があるか答えなさい。

Lv.3 (4) 実数 a, b について、命題「$ab = 0$ ならば $a = 0$ または $b = 0$ である」の対偶を述べなさい。

計算・解答スペース

6 必要条件・十分条件　重要度 ★★★★★

◆ 各組の条件について、p が q の必要条件・十分条件・必要十分条件・いずれでもない、のいずれかを答えなさい。

Lv.1 (1) 実数 x について、p：$x = 2$，q：$x^2 = 4$

Lv.2 (2) 正の整数 n について、p：n は 6 の倍数である，q：n は 3 の倍数である

Lv.2 (3) 図形について、p：4 つの内角がすべて直角である，q：長方形である

Lv.3 (4) 実数 a, b について、p：$a = b$，q：$a^2 = b^2$

計算・解答スペース

7 命題の否定　重要度 ★★★★☆

◆ 次の命題の否定を述べなさい。

Lv.1 (1) 「すべての実数 x について、$x^2 \geqq 0$ である。」

Lv.2 (2) 「すべての生徒が数学を学習している。」

Lv.2 (3) 「ある自然数 n が存在して、$n^2 = 2$ である。」

Lv.3 (4) 「実数 x について、$x > 2$ ならば $x^2 > 4$ である。」

計算・解答スペース

8 対偶による証明　重要度 ★★★★★

◆ 次の命題を証明しなさい。

Lv.2 (1) 整数 n について、「n^2 が偶数ならば、n は偶数である。」

Lv.3 (2) 整数 n について、「n^2 が 3 の倍数ならば、n は 3 の倍数である。」

Lv.3 (3) 整数 n について、「n^2 が奇数ならば、n は奇数である。」

計算・解答スペース

9 背理法・総合問題　重要度 ★★★★☆

◆ 次の命題を証明しなさい。

Lv.3 (1) $\sqrt{2}$ は無理数であることを、背理法を用いて証明しなさい。

Lv.4 (2) 整数 a, b について、「$a + b$ が奇数ならば、a, b の一方は偶数で他方は奇数である。」ことを証明しなさい。

計算・解答スペース

解答・解説

1

【考え方・テクニック】

集合は、全体集合の範囲を確認してから要素を書き並べます。部分集合では「一方の集合のすべての要素が、他方にも含まれる」ことを確かめます。

【正答】

(1) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

(2) $\{3, 4, 5\}$

(3) A のすべての要素 $1, 2, 3$ が B に含まれるので、$A \subset B$。

(4) $\{-1, 0, 1\}$

【解説】

(4) $x^2 < 4$ を満たすのは $x = -1, 0, 1$ です。$x = -2, 2$ では $x^2 = 4$ となり、不等号を満たしません。

2

【考え方・テクニック】

和集合は「どちらか一方に含まれる」要素、共通部分は「両方に含まれる」要素です。人数の問題では、両方に含まれる人数を重複して数えないようにします。

【正答】

(1) $A \cap B = \{6\}$，$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$

(2) $40 - (25 + 18 - 10) = 7$ より、7 人。

(3) $\{2, 3, 4, 5\}$

(4) 2 個

【解説】

(2) 少なくとも一方を学習している生徒は $25 + 18 - 10 = 33$ 人です。全体から引くと、どちらも学習していない生徒数が求められます。

3

【考え方・テクニック】

補集合は「全体集合のうち、その集合に含まれない部分」です。ド・モルガンの法則では、和集合と共通部分が入れ替わることに注意します。

【正答】

(1) $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$

(2) $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1, 5, 7\}$，$\overline{A \cup B} = \{1, 5, 7\}$

(3) $A \cap B$

(4) $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

4

【考え方・テクニック】

命題は真または偽が明確に定まる文です。「$p \Rightarrow q$」では、p が仮定、q が結論です。反例が 1 つでもあれば命題は偽になります。

【正答】

(1) 真。

(2) $p \Rightarrow q$ は真。$q \Rightarrow p$ は偽。

(3) p は q の十分条件。

(4) 仮定：$x = 2$，結論：$x^2 = 4$。

【解説】

(2) $q \Rightarrow p$ については、$x = -4$ とすれば $x^2 > 9$ ですが $x > 3$ ではないので、偽です。

5

【考え方・テクニック】

命題と対偶は常に真偽が一致します。真偽を調べにくい命題は、対偶に言い換えると証明しやすくなる場合があります。

【正答】

(1) 逆：$x^2 > 9$ ならば $x > 3$ である（偽）。裏：$x \leqq 3$ ならば $x^2 \leqq 9$ である（偽）。対偶：$x^2 \leqq 9$ ならば $x \leqq 3$ である（真）。

(2) 逆：n が偶数ならば、n は 4 の倍数である（偽）。

(3) 命題とその対偶の真偽は一致する。

(4) $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ ならば $ab \neq 0$。

【解説】

(1) 逆と裏は $x = -4$ を反例として偽と分かります。対偶は元の命題と真偽が一致します。

6

【考え方・テクニック】

$p \Rightarrow q$ が成り立つとき、p は q の十分条件、q は p の必要条件です。逆向きも成り立つとき、p, q は必要十分条件です。

【正答】

(1) 十分条件。

(2) 十分条件。

(3) 必要十分条件。

(4) 十分条件。

【解説】

(1) $x = 2$ なら $x^2 = 4$ ですが、$x^2 = 4$ からは $x = -2$ の場合もあるため、逆は成り立ちません。

(4) $a = b$ なら $a^2 = b^2$ ですが、$a = -b$ の場合もあるため逆は成り立ちません。

7

【考え方・テクニック】

「すべての…」の否定は「…でないものが少なくとも 1 つ存在する」、「ある…」の否定は「すべての…について、…でない」となります。$p \Rightarrow q$ の否定は「p かつ q でない」です。

【正答】

(1) ある実数 x が存在して、$x^2 < 0$ である。

(2) 数学を学習していない生徒が少なくとも 1 人いる。

(3) すべての自然数 n について、$n^2 \neq 2$ である。

(4) ある実数 x が存在して、$x > 2$ かつ $x^2 \leqq 4$ である。

8

【考え方・テクニック】

対偶を示して証明します。整数が偶数でないことは奇数であること、3 の倍数でないことは 3 で割った余りが 1 または 2 であることを利用します。

【正答】

(1) 対偶「n が奇数ならば n^2 は奇数である」を示す。$n = 2k + 1$ とすると、$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ より奇数。よって元の命題は真。

(2) 対偶を示す。n が 3 の倍数でないとき、$n = 3k + 1$ または $n = 3k + 2$。それぞれ n^2 を 3 で割った余りは 1 なので、n^2 は 3 の倍数でない。よって元の命題は真。

(3) 対偶「n が偶数ならば n^2 は偶数である」を示す。$n = 2k$ とすると $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ より偶数。よって元の命題は真。

9

【考え方・テクニック】

背理法では、命題の結論を否定して矛盾を導きます。整数の偶奇の議論では、「偶数＋偶数」「奇数＋奇数」はいずれも偶数になることを使います。

【正答】

(1) $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定し、$\sqrt{2} = m/n$（m, n は互いに素な正の整数）とおく。$m^2 = 2n^2$ より m^2 は偶数、したがって m は偶数である。$m = 2k$ とおくと $n^2 = 2k^2$ となり、n も偶数である。これは m, n が互いに素であることに矛盾する。よって $\sqrt{2}$ は無理数である。

(2) a, b がともに偶数、またはともに奇数であると仮定する。ともに偶数なら $a + b$ は偶数、ともに奇数でも $a + b = 2(m + n + 1)$ の形で偶数となる。これは $a + b$ が奇数であることに矛盾する。よって、一方は偶数で他方は奇数である。